

# الرياضيات

للفف الخامس العلمي  
الفرع التطبيقي

المؤلفون

د. عبد علي حمودي الطائي

د. طارق شعبان رجب	د. رحيم يونس كرو
محمد عبد الغفور الجواهري	منعم حسين التميمي
يوسف شريف المعمار	جعفر رضا هاشم الزبيدي



المشرف العلمي على الطبع : سعد عبد الجبار حسن الطاهر

المشرف الفني على الطبع : ماهر داود السوداني

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

[www.manahj.edu.iq](http://www.manahj.edu.iq)

[manahjb@yahoo.com](mailto:manahjb@yahoo.com)

[Info@manahj.edu.iq](mailto:Info@manahj.edu.iq)



manahjb

manahj

استناداً الى القانون يوزع مجاناً ويمنع بيعه وتداوله في الاسواق





# بسم الله الرحمن الرحيم

## المقدمة :

هذا الكتاب مخصص لطلبة الصف الخامس العلمي ضمن سلسلة كتب الرياضيات لطلبة الدراسة الأعدادية ( الفرع التطبيقي) . حاولنا أن نضع بين أيدي أبنائنا الطلبة كتاباً يستطيعون من خلال دراسته متابعة المفاهيم والمصطلحات الواردة فيه . وادراك هذه المفاهيم ومن ثم أكتساب المهارات المترتبة عليها . ويتكون من تسعة فصول

الفصل الاول اللوغاريتمات وكيفية استخدام الآلة الحاسبة ، احتوى الفصل الثاني على المتتابعات اما الفصل الثالث فقد احتوى على القطوع المخروطية مقتصراً على موضوع الدائرة . وقد احتوى الفصل الرابع على الدوال الدائرية ورسم منحنيات الدوال الدائرية البسيطة اما الفصل الخامس يتضمن غاية الدالة واستمراريتها . اما الفصل السادس فقد احتوى على المشتقة والقواعد الأساسية للمشتقة ومشتقات الدوال الدائرية وتضمن الفصل أيضاً على تطبيقات هندسية وفيزيائية ويتضمن الفصل السابع تكملة موضوع الهندسة الفراغية واحتوى الفصل الثامن على مبدأ العد والتباديل والتوافيق والاحتمال ونسبة الاحتمال . وينتهي الكتاب بالفصل التاسع المصفوفات وكيفية حل جملة معادلات خطية في متغيرين أو أكثر .

لذا نرجو من الله العلي القدير أن يوفق أبنائنا الطلبة الى ما فيه الخير لهم وابلدنا العزيز ونأمل من زملائنا المدرسين موافاتنا بملاحظاتهم بهدف التطوير

ومنه العون

المؤلفون

# المحتويات

5-18	اللوغارتيمات	الفصل الاول	
19-38	المتتابعات	الفصل الثاني	
39-53	القطوع المخروطية	الفصل الثالث	
54-103	الدوال الدائرية	الفصل الرابع	
104-123	الغاية والاستمرارية	الفصل الخامس	
124-163	المشتقات	الفصل السادس	
164-189	الهندسة الفضائية ( المجسمة )	الفصل السابع	
190-215	مبدأ العد والتباديل	الفصل الثامن	
216-258	المصفوفات	الفصل التاسع	



## Chapter 1

### Logarithms اللوغاريتمات

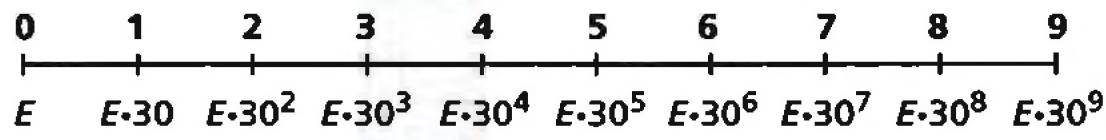
- [1-1] نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات .
- [1-2] الدالة اللوغاريتمية .
- [1-3] خواص الدالة اللوغاريتمية .
- [1-4] اللوغاريتمات العشرية .
- [1-5] اللوغاريتمات الطبيعية .
- [1-6] استخدام الآلة الحاسبة .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
الدالة الاسية	$f(x) = a^x$
الدالة اللوغاريتمية	$y = \log_a x$
اللوغاريتمات العشرية	$y = \log x$
اللوغاريتمات الطبيعية	$y = \ln x$



## [1-1] نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات

اكتشفت اللوغاريتمات في أوائل القرن السابع عشر من قبل الملاك الاسكتلندي جون نابيير (1550 - 1617م) الذي كان شغوفاً بالرياضيات ومن اهم اعماله استخدام اللوغاريتمات التي ساعدت في تبسيط الحسابات الفلكية المعقدة التي تحتوي في اغلبها عمليتي الضرب والقسمة وتحويلها الى عمليتي الجمع والطرح وكان كتابه ((توصيف قواعد اللوغاريتم المدهشة)) الذي نشره في عام 1614 م . وقد حوى هذا الكتاب اولى الجداول اللوغاريتمية التي استغرق اعدادها 20 سنة. الفكرة الأساس القائمة عليها اللوغاريتمات هي تحويل الاعداد على شكل أس والتعامل معها عوضاً عن الاعداد الاصلية.



واليك بعض المجالات التي تستخدم فيها اللوغاريتمات:

استخدامه في قياس قوة الزلزال على مقياس ريختر.

يصف الرقم الهيدروجيني للمادة (PH) درجة حموضة المادة

التي تحسب باستخدام اللوغاريتمات للأساس 10 حيث:

$$PH = -\log [H^+]$$

$H^+$  تركيز أيون الهيدروجين في المادة

\*يستخدم في قياس شدة الصوت (L) بالديسيبل حيث:

$$L = 10 \log a/a_0$$

$a_0$ : اقل شدة للصوت تستطيع إذن انسان عادي ان تميزه .

\*حساب سرعة الصواريخ (s) حيث:

$$s = -0.0098n + v \ln k$$

n: زمن اشتعال وقود المحرك.

v: سرعة انطلاق البخار كم/ثا.

k: نسبة كتلة الصاروخ محمل بالوقود الى كتلته بدون وقود

$L_n$ : اللوغاريتم الطبيعي.

\* في الاحصاء يستخدم في حساب الفائدة المركبة المستمرة R حيث:

$$R = m e^{n \cdot r}$$

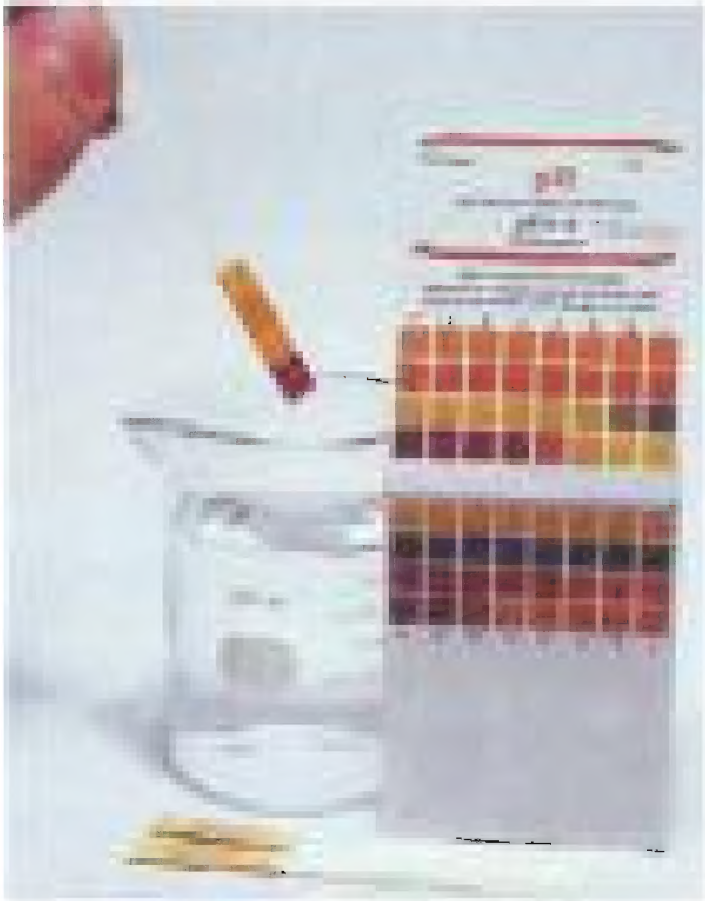
m: المبلغ المستثمر.

r: الفائدة.

n: عدد السنوات .

$$\sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3) \dots (x_n)} = \text{حساب الوسط الهندسي}$$

في البنود اللاحقة سندرس اللوغاريتمات العشرية والطبيعية .





## [1-2] الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

لقد درست في الصف الرابع العلمي الدالة الأسية:

وهي دالة تقابل  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{++}$  ,  $f(x) = a^x$  ,  $a > 0$  ,  $a \neq 1$

ولانها دالة تقابل فلها دالة عكسية  $(f^{-1})$  حيث  $f^{-1}: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$

وهي تقابل ايضاً وتدعى هذه بالدالة اللوغاريتمية

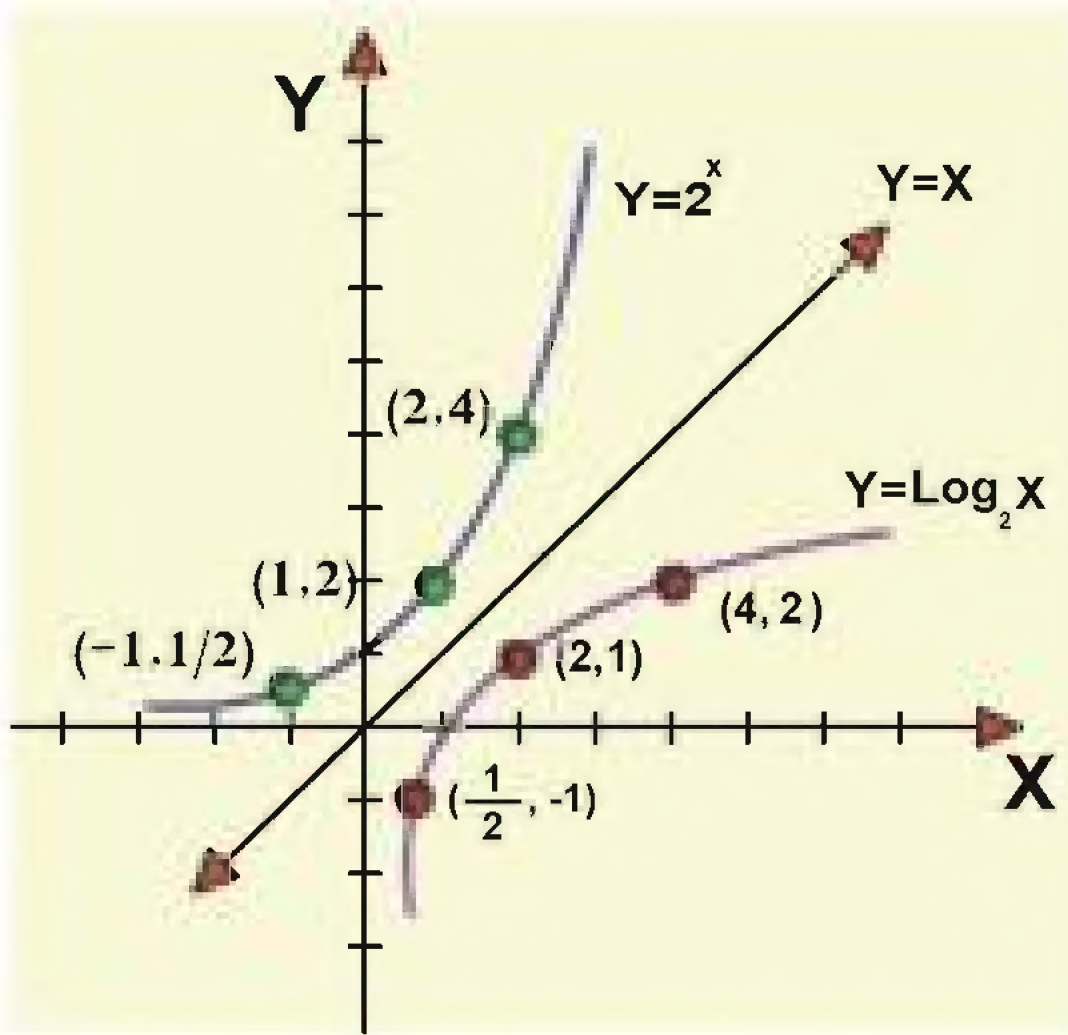
ولتوضح ذلك: الجدول أدناه يمثل بعض الأزواج المرتبة التي تمثل الدالة  $y = 2^x$

x	2	1	0	-1
$2^x$	4	2	1	1/2

بالاعتماد على النقاط :-  $\{(2,4) , (1,2) , (0,1) , (-1, \frac{1}{2})\}$  رسمنا المنحني البياني  $y = 2^x$

ويمكن رسم المنحني البياني للتقابل العكسي بالاعتماد على نظائر هذه النقاط والتي هي :-

$\{(-\frac{1}{2}, -1) , (1,0) , (2,1) , (4,2)\}$



والشكل المجاور يوضح ذلك.

وبصورة عامة يمكن وضع تعريف الدالة اللوغاريتمية بالشكل الآتي :-

الدالة اللوغاريتمية :

يرمز للدالة العكسية للدالة  $y = a^x$  بالرمز  $x = \text{Log}_a y$  فنقول ان  $x$  هو لوغاريتم  $y$  لاساس  $a$ .

ويمكننا ان نكتب العلاقة الآتية:

$$x = \text{Log}_a y \Leftrightarrow y = a^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} , y \in \mathbb{R}^{++} , a > 0 , a \neq 1$$



## مثال 1

اكتب كلا مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية:

1.  $5^3 = 125$

2.  $0.001 = 10^{-3}$

3.  $2 = 32^{1/5}$

الحل:

من المعلوم ان  $x = \text{Log}_a y \Leftrightarrow y = a^x$

1.  $5^3 = 125$  تكافئ  $\text{Log}_5 125 = 3$

2.  $0.001 = 10^{-3}$  تكافئ  $\text{Log}_{10} 0.001 = -3$

3.  $2 = 32^{1/5}$  تكافئ  $\text{Log}_{32} 2 = 1/5$

## مثال 2

اكتب كلا مما يأتي بالصورة الاسية:

1.  $\text{Log}_7 49 = 2$

2.  $\text{Log}_{\sqrt{2}} 64 = 12$

3.  $\text{Log}_{10} 10000 = 4$

الحل :

من المعلوم ان  $\text{Log}_a y = x \Leftrightarrow y = a^x$

1.  $\text{Log}_7 49 = 2 \Rightarrow 49 = 7^2$

2.  $\text{Log}_{\sqrt{2}} 64 = 12 \Rightarrow 64 = (\sqrt{2})^{12}$

3.  $\text{Log}_{10} 10000 = 4 \Rightarrow 10000 = 10^4$

## [1-3] خواص الدالة اللوغاريتمية

سنذكر بعض خواص الدالة اللوغاريتمية:

1. لكل عدد حقيقي موجب لوغاريتم.

2. ليس للعدد الحقيقي السالب لوغاريتم.

3. بما ان الدالة اللوغاريتمية تقابل فان:

$$x = y \Leftrightarrow \text{Log}_a x = \text{Log}_a y, \forall x, y \in \mathbb{R}^{++}$$

4. لما كان  $a > 0, a \neq 1$  لكل  $x, y \in \mathbb{R}^{++}$  سنقبل القواعد الآتية بدون برهان:

a.  $\text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$

b.  $\text{Log}_a(x/y) = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$

c.  $\text{Log}_a x^n = n \text{Log}_a(x), \forall n \in \mathbb{R}$

d.  $\text{Log}_a a = 1$

e.  $\text{Log}_a 1 = 0$



### ملاحظة:

مغالطات قواعد اللوغاريتمات:

- \*  $\text{Log}_a(xy) \neq \text{Log}_a x \cdot \text{Log}_a y$
- \*  $\text{Log}_a(x/y) \neq \frac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a y}, y \neq 0$
- \*  $\text{Log}_a x^n \neq (\text{Log}_a x)^n$

### مثال 3

أثبت ان :-

$$\text{Log}_2(17/5) - \text{Log}_2(34/45) + 2 \text{Log}_2(2/3) = 1$$

الحل :

الطرف الايسر:

$$\text{Log}_2 17/5 - \text{Log}_2 34/45 + \text{Log}_2 (2/3)^2$$

بعد الاختصار نحصل على

$$\text{Log}_2 \left( \frac{17}{5} \cdot \frac{45}{34} \cdot \frac{4}{9} \right)$$

الطرف الايمن

$$\text{Log}_2 2 = 1$$

### مثال 4

حل المعادلات الآتية:

1.  $\text{Log}_3 x = 4$
2.  $\text{Log}_x 64 = 6$
3.  $\text{Log}_5 1/125 = x$
4.  $\text{Log}_x 343 = 3$

الحل :

$$1. \text{Log}_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4$$

$$x = 81 \Rightarrow \{81\} = \text{مج}$$

$$2. \text{Log}_x 64 = 6 \Rightarrow 64 = x^6 \Rightarrow 2^6 = x^6$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$\{2\} = \text{مج}$$

لمذا ؟

$$3. \text{Log}_5 1/125 = x \Rightarrow 1/125 = 5^x$$

$$5^{-3} = 5^x \Rightarrow x = -3$$

$$\{-3\} = \text{مج}$$

$$4. \text{Log}_x 343 = 3 \Rightarrow 343 = x^3 \Rightarrow 7^3 = x^3$$

$$\therefore x = 7$$

$$\{7\} = \text{مج}$$



## مثال 5

أ. جد العدد الذي لوغاريتمه للأساس  $(1/4)$  هو  $(2.5)$

ب. جد أساس العدد  $(0.01)$  الذي لوغاريتمه  $(1)$

ج. جد لوغاريتم العدد  $(1/8)$  للأساس  $(2)$

الحل :

أ. نفرض العدد  $x = \text{Log}_{1/4} 2.5$

$$\therefore x = (1/4)^{2.5} \Rightarrow x = 1/(2^2)^{2.5} \Rightarrow x = 1/32$$

ب. نفرض الأساس  $x = \text{Log}_x 0.01 = 1$

$$0.01 = x^1 \Rightarrow x = 0.01$$

ج. نفرض اللوغاريتم  $x = \text{Log}_2 1/8$

$$1/8 = 2^x \Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$$

## تمارين (1-1)

1. جد قيمة  $x$  لكل مما يأتي:

أ.  $\text{Log}_{10} x = 5$

ب.  $\text{Log}_x 16 = -4$

ج.  $\text{Log}_{10} 0.00001 = x$

2. اكتب الصورة الأخرى لكل مما يأتي:

أ.  $\text{Log}_{10} 10000 = 4$     ب.  $7^3 = 343$     ج.  $\text{Log}_5 1/25 = -2$     د.  $(0.01)^2 = 0.0001$

3. فيما يلي علاقات غير صحيحة دائماً. أعط  $x = a$ ،  $y = a$ ، حيث  $a > 0$  وبين ذلك:

أ.  $\text{Log}_a (x + y) \neq \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$

ب.  $\text{Log}_a x y \neq \text{Log}_a x \cdot \text{Log}_a y$

ج.  $\text{Log}_a x^2 \neq (\text{Log}_a x)^2$

4. جد قيمة ما يأتي :

أ.  $\text{Log}_{10} 40/9 + 4 \text{Log}_{10} 5 + 2 \text{Log}_{10} 6$

ب.  $2 \text{Log}_{10} 8 + \text{Log}_{10} 125 - 3 \text{Log}_{10} 20$

ج.  $\text{Log}_a (x^2 - 4) - 2 \text{Log}_a (x - 2) + \text{Log}_a (x - 2) / (x + 2)$

5. إذا كان  $\text{Log}_{10} 3 = 0.4771$ ،  $\text{Log}_{10} 2 = 0.3010$  جد قيمة كل مما يأتي:

أ.  $\text{Log}_{10} 0.002$

ب.  $\text{Log}_{10} 2000$

ج.  $\text{Log}_{10} 12$



- a)  $\log_3(2x - 1) + \log_3(x + 4) = \log_3 5$   
 b)  $\log_2(3x + 5) - \log_2(x - 5) = 3$   
 c)  $\log_a \frac{6}{5} + \log_a \frac{5}{66} - \log_a \frac{132}{121} + \log_a 12 = x$   
 d)  $\log_{10}(3x - 7) + \log_{10}(3x + 1) = 1 + \log_{10} 2$

#### [1-4] اللوغاريتمات العشرية Decimal Logarithms

سبق ان درسنا اللوغاريتم لاي اساس  $a > 0$  ,  $a \neq 1$

والآن سنتعرف على لوغاريتم اساسه  $a = 10$  يسمى اللوغاريتم العشري (اللوغاريتم الاعتيادي Common Logarithm) وقد اتفق على عدم كتابة الاساس (10) حين استعماله.

فمثلاً:  $\log 7$  يكتب  $\log_{10} 7$  ،  $\log 0.06$  يكتب  $\log_{10} 0.06$

$\log x$  يكتب  $\log_{10} x$

ومن المفيد هنا ان نذكر  $\log 10^n = n$  فمثلاً:  $\log 10^5 = 5$  ،  $\log 10^{-2} = -2$  ،  $\log 0.01 = \log 10^{-2} = -2$

#### [1-5] اللوغاريتمات الطبيعية Natural Logarithm

تعرفت في بند [1-4] على اللوغاريتمات العشرية حيث كان الاساس (10) والان سنتعرف على اللوغاريتمات التي اساسها (( e ))

حيث  $e = 2.718281828459045$  ويمكن ايجاده ( ) حيث  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

وبالتقريب تكون  $e = 2.71828$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow$

بشكل :

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
0.1	2.59374264
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

وإذا فرضنا  $\frac{1}{x} = n$  فإن  $n \rightarrow \infty$  إذا كانت  $x \rightarrow 0^+$

ويصبح القانون  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

والتي تسمى باللوغاريتمات الطبيعية وتكتب بالشكل ((Ln)) لتمييزها عن اللوغاريتم العشري ((Log))

من تعريف ( الدالة اللوغاريتمية ) لو بدلنا الاساس  $a$  بالاساس  $e$  نحصل على

$$x = \text{Ln } y \Leftrightarrow y = e^x$$

ملاحظة:

قواعد اللوغاريتمات الطبيعية نفس قواعد اللوغاريتمات العشرية

نتيجة (1):

$$\text{Ln } e^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

البرهان: الطرف الايسر

$$\text{Ln } e^x = x \text{ Ln } e$$

$$= (x)(1)$$

$$= x \quad \text{الطرف الايمن}$$

نتيجة (2):

قاعدة تبديل الاساس .

$$a > 0, a \neq 1$$

$$\text{Log}_a x = \frac{\text{Ln } x}{\text{Ln } a}, \text{Log}_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

البرهان : الطرف الايسر .

$$y = \text{Log}_a x \Rightarrow x = a^y \quad \dots\dots\dots (1)$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة 1

$$\text{Ln } x = \text{Ln } a^y$$

$$\text{Ln } x = y \text{ Ln } a \Rightarrow y = \text{Ln } x / \text{Ln } a = \text{الطرف الايمن}$$

مثال

$$1 / \text{Log}_3 15 + 1 / \text{Log}_5 15 \quad \text{ما قيمة}$$

الحل :

$$1 / (\text{Ln } 15 / \text{Ln } 3) + 1 / (\text{Ln } 15 / \text{Ln } 5) = (\text{Ln } 3 / \text{Ln } 15) + (\text{Ln } 5 / \text{Ln } 15) \\ = (\text{Ln } 3 + \text{Ln } 5) / \text{Ln } 15 = \text{Ln } 15 / \text{Ln } 15 = 1$$



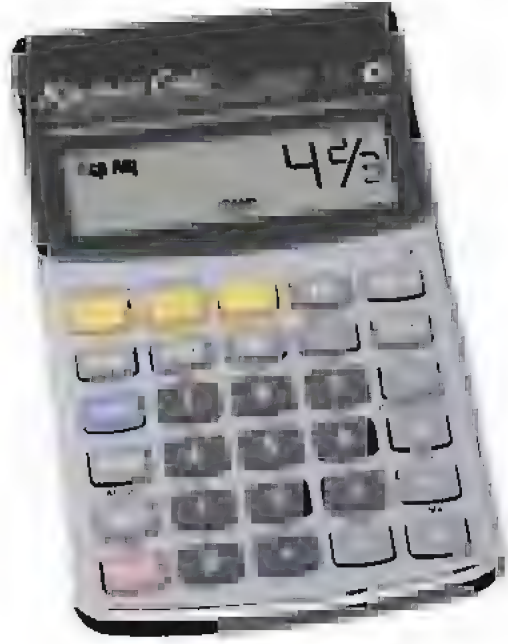
## [1-6] استخدام الآلة الحاسبة

بعد دراستنا للوغاريتمات العشرية والطبيعية وبعض قوانين اللوغاريتمات. الان سندرس كيفية استخدام الحاسبة (Calculator) لأيجاد لوغاريتم عدد ولوغاريتمات الاعداد المقابلة.

**أولاً:** ايجاد لوغاريتم العدد :

**(أ)** في حالة اللوغاريتمات العشرية (Log)

• نكتب العدد المعطى ثم نضغط على المفتاح Log فيظهر الناتج .



### مثال 1

استخدم آتلك الحاسبة لتجد:

1. Log 7      2. Log 13      3. Log 0.08      4. Log 1.5

**الحل :**

1. نكتب 7 ثم نضغط Log الناتج = 0.84509804

اي  $\text{Log} 7 = 0.84509804$

2. نكتب 13 نضغط Log الناتج = 1.113941352

3. نكتب 0.08 نضغط Log الناتج = - 1.096910013

4. نكتب 1.5 نضغط Log الناتج = 0.176091259

**(ب)** في حالة اللوغاريتمات الطبيعية ((Ln))

• نكتب العدد نضغط المفتاح Ln فيظهر الناتج

### مثال 2

استخدم آتلك الحاسبة لتجد:

1. Ln 7      2. Ln 13      3. Ln 0.08      4. Ln 1.5

**الحل :**

1. نكتب 7 نضغط Ln الناتج = 1.945910149

2. نكتب 13 نضغط Ln الناتج = 2.564949357

3. نكتب 0.08 نضغط Ln الناتج = - 2.525728644

4. نكتب 1.5 نضغط Ln الناتج = 0.405465108



**نتيجه:** أيجاد العدد المقابل اذا علم لوغاريتمه

( أ ) في حالة اللوغاريتمات العشرية

نكتب لوغاريتم العدد المعطى نضغط على مفتاح 2ndF (او في بعض الحاسبات INV) ويكون لونه عادةً ((اصفر، ازرق ...)) ثم نضغط على Log فيظهر العدد المطلوب .

### مثال 3

باستخدام آتلك الحاسبة جد الاعداد المقابلة التي لوغاريتماتها العشرية هي:

1. 0.84509804    2. 1.113943352    3. - 1.096910013    4. 0.176091259

**الحل:**

1. نكتب 0.84509804 نضغط 2ndF ثم نضغط Log فيظهر 7

2. نكتب 1.113943352 نضغط 2ndF نضغط Log يظهر 12.9999999  $\simeq 13$

3. نضغط مفتاح  $\boxed{-}$  نكتب 0.096910013 ثم نضغط  $\boxed{=}$

فيظهر -0.096910013 ثم نضغط 2ndF ثم Log يظهر 0.08

4. نكتب 0.176091259 نضغط 2ndF ثم Log يظهر 1.5

**ملاحظة:**

قارن نتائج مثال (1) مع مثال (3)

( ب ) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية ((Ln))

نكتب لوغاريتم العدد المعطى ثم نضغط على مفتاح 2ndF ثم نضغط Ln فيظهر العدد المطلوب

### مثال 4

جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتمها الطبيعي هي:

1. 1.945910149    2. 2.564949357

3. -2.525728644    4. 0.405465108

**الحل:**

1. نكتب 1.945910149 نضغط 2ndF ثم Ln فيظهر 7

2. نكتب 2.564949357 ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح Ln يظهر 12.999999999  $\simeq 13$

3. نضغط  $\boxed{-}$  نكتب 2.525728644 ثم  $\boxed{=}$  فيظهر -2.525728644

نضغط 2ndF ثم Ln فيظهر 0.08

4. نكتب 0.405465108 نضغط 2ndF ثم Ln فيظهر 1.5



مثال 1

جد قيمة  $\text{Log}_4 3$

الحل :

باستخدام قاعدة تبديل الأساس

$$\text{Log}_4 3 = \text{Log} 3 / \text{Log} 4 = 0.4771 / 0.6021 = 0.7924$$

مثال 2

جد قيمة  $\text{Log} 7 + \text{Ln} 5$

الحل :

$$\text{Log} 7 = 0.8451 \quad \text{نجد}$$

$$\text{Ln} 5 = 1.6094$$

$$\begin{aligned} \text{Log} 7 + \text{Ln} 5 &\simeq 0.8451 + 1.6094 \\ &= 2.4545 \end{aligned}$$

مثال 3

جد قيمة  $\text{Log}_5 16 - \text{Log}_5 2$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{Log}_5 16 - \text{Log}_5 2 &= \text{Log}_5 16/2 \\ &= \text{Log}_5 8 \quad \text{بتبديل الاساس} \\ &= \text{Log} 8 / \text{Log} 5 \simeq 0.9031 / 0.6999 \\ &\simeq 1.2903 \end{aligned}$$

مثال 4

جد قيمة  $x = (1.05)^{15}$  باستخدام اللوغاريتم

الحل :

$$x = (1.05)^{15} \quad \text{نأخذ لوغاريتم الطرفين}$$

$$\text{Log} x = 15 \text{ Log} 1.05 \quad \text{باستخدام آلتك الحاسبة}$$

$$\text{Log} x = 15 \times 0.0212$$

$$\text{Log} x = 0.3180$$

$$\therefore x = 2.0797$$



### مثال 5

في سنة 1995 حدثت هزة أرضية في إحدى مدن العالم بدرجة 8.0 والمصنف على مقياس ريختر ، وحدثت هزة أخرى في مدينة أخرى بمقدار 6.8 قارن بين الطاقة المنطلقة من هاتين الهزتين .

الحل:

$$R = \frac{E \cdot 30^{8.0}}{E \cdot 30^{6.8}} = \frac{30^{8.0}}{30^{6.8}}$$

$$R = 30^{8.0-6.8}$$

$$R = 30^{1.2}$$

$$\text{Log } R = 1.2 \text{ Log } 30$$

وباستخدام الحاسبة اليدوية نجد

$$R = 59.2$$

### مثال 6

جد الوسط الهندسي للأعداد: 13 ، 14 ، 15 ، 16

الحل :

$$\sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3) \dots (x_n)} = \text{الوسط الهندسي}$$

$$M = \sqrt[4]{(13)(14)(15)(16)}$$

$$\text{Log } M = \frac{1}{4} [\text{Log } 13 + \text{Log } 14 + \text{Log } 15 + \text{Log } 16]$$

$$\text{Log } M = \frac{1}{4} [1.1139 + 1.1462 + 1.1761 + 1.2041]$$

$$= \frac{1}{4} \times 4.6403$$

$$= 1.1601$$

$$\therefore M = 14.458$$

### مثال 7

اوجد الرقم الهيدروجيني لماء البحر اذا كان تركيز أيون الهيدروجين  $[H^+]$  له حوالي:

$$3.2 \times 10^{-9}$$

الحل :

$$\text{PH} = -\text{Log } [H^+] \quad \text{الرقم الهيدروجيني}$$

$$= -\text{Log } 3.2 \times 10^{-9}$$



$$\begin{aligned}
&= -[\text{Log } 3.2 + \text{Log } 10^{-9}] \\
&= -[\text{Log } 3.2 - 9\text{Log } 10] \\
&= -[\text{Log } 3.2 - 9] \\
&= -\text{Log } 3.2 + 9 \\
&= -0.5052 + 9 \\
&= 8.494
\end{aligned}$$

### مثال 8

بفرض أنك تستثمر (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستمرة قدرها 2% اوجد جملة ما ستحصل عليه بعد (10) سنوات.

الحل:

قانون حساب الفائدة المركبة المستمرة هو  $R = m e^{n \cdot r}$

حيث  $m =$  المبلغ ،  $r =$  الفائدة ،  $n =$  عدد السنوات

$$R = 2.000.000 \times e^{\frac{2}{100} \times 10}$$

بأخذ  $\text{Ln}$  الطرفين

$$\text{Ln } R = \text{Ln } 2.000.000 + 1/5$$

$$= 14.7087$$

$$\therefore R = 2442908$$

### مثال 9

استخدم صاروخ لدفع سفينة فضائية. فإذا كانت نسبة كتلته 20 وسرعة انطلاق البخار 1.5 كم/ثا وزمن الاشتعال 100 ثا. جد سرعة الصاروخ .

الحل:

استخدم العلاقة  $s = -0.0098 n + v \text{Ln } k$

حيث:  $s =$  سرعة الصاروخ ،  $n =$  الزمن ،  $v =$  سرعة انطلاق البخار ،  $k =$  نسبة كتلته

$$s = -0.0098 \times 100 + 1.5 \text{Ln} 20$$

$$s = -0.98 + 1.5 \times (2.9956)$$

$$= -0.98 + 4.4934$$

$$\therefore s = 3.5134 \text{ كم/ثا}$$



تمارين (1-2)

« استخدم أنك الحاسبة »

1 جد قيمة كل من:

a.  $\text{Log}_{10} 8$       b.  $\text{Log}_3 15$       c.  $\text{Ln } 200$

2 جد قيمة كل مما يأتي:

a.  $\text{Log}_2 52 - \text{Log } 27$       b.  $\text{Log } 33 + \text{Log}_8 33 + \text{Ln } 33$

3 جد قيمة كل مما يأتي:

a.  $\sqrt[3]{(65.26)^2}$       b.  $(1.02)^{10}$

4 حل كلا من المعادلات الآتية:

a.  $3^x = 26$       b.  $e^{3x+1} = 17$       c.  $(5)(2^x) = 4^{1-x}$

5 جد الوسط الهندسي للأعداد الآتية:

10 ، 11 ، 12 ، 13 ، 14 ، 15

6 أثبت ان:

a.  $1/\text{Log}_a abc + 1/\text{Log}_b abc + 1/\text{Log}_c abc = 1$

b.  $\text{Log } 40/9 + 2(2\text{Log } 5 + \text{Log } 6) = 5$

7 إذا كان

$\text{Log } a = 1/ab$  فإن  $a = \text{Log } b$  ،  $b = \text{Log } c$

8 تركيز ايون الهيدروجين  $[H^+]$  في اللبن هو  $2.5 \times 10^{-7}$  فجد الرقم الهيدروجيني له.

9 باستخدام قانون الفائدة المركبة  $R = me^{n.r}$  لاستثمار مليون دينار بفائدة قدرها 2.5% ولمدة (6) سنوات. جد جملة ما سيحصل عليه.

10 جد سرعة صاروخ نسبة كتلته نحو 10، وسرعة انطلاق بخاره قدرها 3.5 كم/ثا، وزمن اشتعال المحرك 50 ثانية.

11 اي مقدار (مقادير) يكافئ المقدار  $2\text{Log } a - \text{Log } b$  ؟

1.  $\text{Log } (a/b)^2$       2.  $\text{Log } a^2/b$       3.  $\text{Log } (ab)^2$       4.  $\text{Log } a^2 - \text{Log } b$

12 في سنة 1997 حدثت هزة أرضية في إحدى المدن العالمية بدرجة 4.9 والمصنف على مقياس ريختر ، وحدثت هزة أخرى في مدينة أخرى سنة 1999 بمقدار 7.0 ، قارن بين الطاقة المنطلقة من هاتين الهزتين.

13 اختر الإجابة الصحيحة للمقدار  $\text{Log } a/b$

1.  $\text{Log } a / \text{Log } b$       2.  $\text{Log } a - \text{Log } b$       3.  $\text{Log } (a-b)$       4. ليس أي منها



المتتابعات Sequences

- [2-1] المتتابعة كدالة وتعريف .
- [2-2] الحد العام للمتتابعة .
- [2-3] المتتابعة الحسابية .
- [2-3-1] مجموع المتتابعة الحسابية .
- [2-4] المتتابعة الهندسية .
- [2-4-1] الحد العام للمتتابعة الهندسية .
- [2-4-2] المتتابعة الهندسية اللانهائية .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
الحد الأول	$a$
المتتابعة الحسابية	$d = U_{n+1} - U_n$
أساس	
المتتابعة الهندسية	$r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$
المتتابعة الحسابية	$U_n = a + (n-1) d$
الحد العام	
المتتابعة الهندسية	$U_n = a r^{n-1}$
المتتابعة الحسابية	$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1) d]$
مجموع	
المتتابعة الهندسية	$S_n = \frac{a (1 - r^n)}{1 - r}$
المتتابعة الهندسية اللانهائية	$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$



## الفصل الثاني

### المتتابعات Sequences

#### [2-1] المتتابعة كدالة وتعريف

قبل تعريف المتتابعة نأخذ المثال الآتي :

مثال

$$f: \{1, 2, 3, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ليكن

$$f(n) = 5 + 2n$$

إن هذه الدالة تعين لكل عدد صحيح موجب ( $n$ ) من بين عناصر المجموعة الجزئية من  $\mathbb{Z}^+$  الصورة ( $5+2n$ ) وإن:

$$f(1) = 5 + 2 = 7, \quad f(2) = 5 + 4 = 9, \quad f(3) = 5 + 6 = 11$$

$$f(10) = 5 + 20 = 25$$

ويمكن أن نعبر عن هذه الدالة على صورة أزواج مرتبة كالتالي :

$$\{(1,7), (2,9), (3,11), \dots, (10,25)\}$$

ولأن مجال الدالة هو المجموعة  $\{1,2,3,\dots,10\}$  فإنه يمكن كتابة مداها مرتباً على الصورة

$$\{7,9,11,\dots,25\}$$

$$7 = (1) \text{ أي صورة}$$

$$9 = (2) \text{ صورة وهكذا}$$

وهذه الدالة تسمى [متتابعة] والاعداد المتتابعة تسمى بـ [حدود المتتابعة]

المتتابعة هي دالة مجالها  $\mathbb{Z}^+$  (في هذه الحالة تسمى متتابعة غير منتهية Infinite Sequence)

أو أي مجموعة جزئية مرتبة ومنتهية تنتمي إلى  $\mathbb{Z}^+$  تبدأ بالعدد (1) أي على الصورة

$$\{1,2,3,\dots, n\} \text{ (في هذه الحالة تسمى متتابعة منتهية) وتكتب بشكل } \langle \dots, \dots, \dots, \dots \rangle$$

$$f = \{(1,3), (2,7), (5,4), (6,10), (7,9)\}$$

لا تسمى متتابعة لأن مجالها  $\{1,2,5,6,7\}$

وليس  $\{1,2,3,4,5,6\}$

أي أن مجالها ليس مجموعة جزئية مرتبة ومتتابعة من  $\mathbb{Z}^+$  تبدأ بالرقم 1.



### مثال 1

لتكن  $n \in \mathbb{Z}^+$  حيث  $f(n) = 1/n$  أكتب المتتابة .

الحل :

$$f(1) = 1 , f(2) = 1/2 , f(3) = 1/3 , \dots$$

وتكتب بالشكل الآتي : المتتابة  $\langle 1 , 1/2 , 1/3 , \dots \rangle$

### مثال 2

لتكن  $n \in \{1,2,3,\dots,20\}$   $f(n) = n^2 + 1$  أكتب المتتابة .

الحل :

$$f(1) = 2 , f(2) = 5 , f(3) = 10 , \dots , f(20) = 401$$

$\therefore$  المتتابة  $\langle 2 , 5 , 10 , \dots , 401 \rangle$

### مثال 3

لتكن  $n \in \mathbb{R}$  ،  $f(n) = n$  ، هل تمثل متتابة ؟

الحل :

ليست متتابة لأن مجالها ليس  $\mathbb{Z}^+$  أو مجموعة مرتبة منها على صورة  $\{1,2,3,\dots,n\}$

ملاحظة :

إذا لم يحدد مجال المتتابة نعتبره  $\mathbb{Z}^+$

### مثال 4

اكتب الحدود الستة الأولى للمتتابة:

$$f(n) = \begin{cases} 4 - n & \text{فردي } n \\ n^2 & \text{زوجي } n \end{cases}$$

الحل :

$n$  زوجي (even)

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(4) = 4^2 = 16$$

$$f(6) = 6^2 = 36$$

$n$  فردي (odd)

$$f(1) = 4 - 1 = 3$$

$$f(3) = 4 - 3 = 1$$

$$f(5) = 4 - 5 = -1$$

وتكون الحدود الستة الأولى على الترتيب هي :  $\langle 3 , 4 , 1 , 16 , -1 , 36 \rangle$



## [2-2] الحد العام للمتتابعة: General Term For Sequence

الحد العام أو (الحد النوني) هو قاعدة عامة يمكن منها إيجاد كل حدود المتتابعة.

فمثلاً متتابعة الاعداد الزوجية الموجبة:  $2, 4, 6, 8, \dots$  حدها العام هو:

$$f(n) = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

نرمز للحد العام بالرمز  $U_n$  فيكون:  $U_n = f(n)$

بمعنى:  $U_1 = f(1), \quad U_2 = f(2)$

وهكذا، وسنستخدم الرمز  $U_n$  لتعني المتتابعة التي حدها العام  $U_n$  وتكتب

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

وكذلك متتابعة الاعداد الفردية الموجبة:  $1, 3, 5, 7, \dots$  حدها العام هو:

$$U_n = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

مثال 1

اكتب خمسة حدود الأولى من المتتابعة التي حدها العام هو  $\frac{(-1)^n}{n}$

الحل :

$$U_1 = (-1)^1/1 = -1, \quad U_2 = (-1)^2/2 = 1/2, \quad U_3 = (-1)^3/3 = -1/3$$

$$U_4 = (-1)^4/4 = 1/4, \quad U_5 = (-1)^5/5 = -1/5$$

$\therefore$  المتتابعة  $\langle -1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5 \rangle$

مثال 2

اكتب الحدود الستة الأولى للمتتابعة التي حدها العام

$$U_n = \begin{cases} 2 & \text{فردى } n \\ -n/4 & \text{زوجى } n \end{cases}$$

الحل :

$$U_1 = 2, \quad U_2 = -1/2, \quad U_3 = 2, \quad U_4 = -1, \quad U_5 = 2, \quad U_6 = -3/2$$

$\therefore$  المتتابعة  $\langle 2, -1/2, 2, -1, 2, -3/2 \rangle$



### مثال 3

اكتب المتتابة  $U_n$  حيث:

$$U_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{فردى } n \leq 5 \\ n+1 & \text{زوجى } n \leq 6 \end{cases}$$

الحل :

$$U_1 = 1, U_2 = 2+1=3, U_3 = 1/3^2 = 1/9, U_4 = 4+1 = 5$$

$$U_5 = 1/5^2 = 1/25, U_6 = 6+1 = 7$$

$\therefore$  المتتابة  $\langle 1, 3, 1/9, 5, 1/25, 7 \rangle$

### مثال 4

اكتب الثلاثة حدود الأولى من المتتابة التي حدها العام  $U_n = 3$

الحل :

$$U_1 = 3, U_2 = 3, U_3 = 3$$

$\therefore$  المتتابة  $\langle 3, 3, 3 \rangle$

ملاحظات :

1. المتتابة التي حدودها متساوية تسمى [ المتتابة الثابتة ]
2. ترتيب الحدود يعد خاصية مميزة للمتتابة ولذلك فإن المتتابعتين :  
 $\langle F_n \rangle = \langle 3, 2, 7, 9, 4 \rangle$  ,  $\langle H_n \rangle = \langle 3, 7, 2, 9, 4 \rangle$   
مختلفتان لأن :  
 $F_2 = 2$  بينما  $H_2 = 7$   
 $F_3 = 7$  بينما  $H_3 = 2$
3. قد لا تكون لبعض المتتابعات قاعدة لحدها العام فمثلاً :  
المتتابة  $\langle 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots \rangle$   
ليس لحدها العام قاعدة حيث لا يمكن إيجاد صورة عامة يمكن بواسطتها إيجاد كل حدود هذه المتتابة .



تمارين ( 2-1 )

1. أي العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة:

- أ. كل دالة مجالها  $Z^+$  هي متتابعة.
- ب. كل دالة مداها  $Z^+$  هي متتابعة.
- ج. كل دالة مجالها  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  هي متتابعة.
- د. كل دالة مجالها  $Z$  هي متتابعة.
- هـ. كل دالة مجالها  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  متتابعة منتهية.
- و. كل دالة مجالها  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  هي متتابعة.
- ز. الحد الرابع في المتتابعة  $\langle \sqrt{n} / (n+1) \rangle$  يساوي  $2/5$ .
- ح. مجال المتتابعة  $\langle 2, 4, 6, \dots, 96 \rangle$  هو  $Z^+$ .
- ط. في المتتابعة  $\langle U_n \rangle$  حيث  $U_{n+1} = n U_n$  فإن الحدان الأول والثاني مختلفان عندما  $n = 1$ .
- ي. في المتتابعة  $\langle n^2 \rangle$  يكون  $U_{n+1} < U_n$ .

2. أكتب كلاً من المتتابعات الآتية مكتفياً بذكر الحدود الستة الأولى:

- أ.  $U_n = n^2 - 2n$
- ب.  $U_n = 2$
- ج.  $U_n = 6/n$
- د.  $U_{n+1} = \frac{4}{1+U_n}, U_1 = 1$
- هـ.  $U_n = 1 - \frac{2}{n}$
- و.  $U_n = (-1)^n$
- ز.  $U_n = 2^{n-1}$
- ح.  $U_n = \begin{cases} 1 & \text{فردية } n \\ 2 & \text{زوجية } n \end{cases}$

3. في المتتابعة  $\langle U_n \rangle$  حيث  $U_n = n^2 + 2n$  أثبت أن  $U_{n+1} > U_n$

4. اكتب ثمانية حدود من المتتابعة بفرض:

$$\Rightarrow U : Z^+ \rightarrow R, U_n = \begin{cases} n + 2 & \text{فردية } n \\ \frac{4}{n} & \text{زوجية } n \end{cases}$$



### [2-3] المتتابة الحسابية Arithmetic Sequence

هي متتابة يكون فيها ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرةً يساوي عدداً ثابتاً يسمى أساس المتتابة (الفرق المشترك Common Difference) ويرمز له بالحرف  $d = U_{n+1} - U_n$  وكذلك فإنه يكفي لتعيين المتتابة الحسابية معرفة حدها الأول (a) First Term وأساسها (d) ثم بإضافة الأساس الى الحد الاول نحصل على الحد الثاني وهكذا...

فمثلاً المتتابة الحسابية التي فيها  $a = 2$  ،  $d = 3$  هي:

$$\langle 2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots \rangle$$

والمتتابة التي حدها الأول  $a =$  وأساسها  $d =$  هي:

$$\langle a, a+d, a+2d, a+3d, \dots \rangle$$

#### أنواع المتتابعات الحسابية:

أ.  $\langle 2, 4, 6, 8, \dots \rangle$  متتابة متزايدة فيها  $d > 0$  ( $d=4-2=2$ )

ب.  $\langle 7, 3, -1, -5, \dots \rangle$  متتابة متناقصة فيها  $d < 0$  ( $d=3-7=-4$ )

ج.  $\langle 3, 3, 3, \dots \rangle$  متتابة ثابتة فيها  $d = 0$  ( $d=3-3=0$ )

#### الحد العام للمتتابة الحسابية: General Term for Arithmetic Sequence

ذكرنا أن المتتابة الحسابية التي حدها الأول  $a =$  وأساسها  $d =$  هي:

$$\langle a, a+d, a+2d, a+3d, \dots \rangle$$

$$\therefore U_1 = a = a + (0) d = a + (1-1) d$$

$$U_2 = a + (1) d = a + (2-1) d$$

$$U_3 = a + (2) d = a + (3-1) d$$

$$U_4 = a + (3) d = a + (4-1) d$$

$$\therefore U_n = a + (n-1) d, \forall n > 0, n \in \mathbb{N}$$

وبصورة عامة

يسمى بالحد العام أو (الحد النوني) للمتتابة الحسابية.



### مثال 1

اكتب المتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 7 ، وأساسها = -3 مكتفياً بالحدود الستة الاولى

$$\begin{array}{ccccccc} & +(-3) & +(-3) & +(-3) & +(-3) & +(-3) & \\ & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \\ & 7 & , 4 & , 1 & , -2 & , -5 & , -8 , \dots \end{array}$$

منها:

الحل:

المتتابعة هي:  $\langle 7, 4, 1, -2, -5, -8, \dots \rangle$

### مثال 2

أوجد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية:  $\langle 4, 9, 14, \dots \rangle$

الحل:

نستخدم قانون الحد العام:

$$d = 5, a = 4$$

$$\therefore U_n = a + (n-1)d$$

$$U_{10} = 4 + (10-1) \times 5 = 4 + 9 \times 5 = 49$$

### مثال 3

اكتب المتتابعة الحسابية التي حدها السابع = 36 وأساسها = 4

الحل:

$$U_7 = a + 6d$$

$$36 = a + 6 \times 4 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} & +4 & +4 & +4 & & & \\ & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & & & \\ & 12 & , 16 & , 20 & , 24 & , \dots \end{array}$$

$\therefore$  المتتابعة الحسابية هي:  $\langle 12, 16, 20, 24, \dots \rangle$

### مثال 4

متتابعة حسابية حدها الثالث = 9 وحدها السابع = -3 أوجد حدود المتتابعة بين  $U_3$  ،  $U_7$  .

الحل:

$$U_3 = a + 2d = 9 \quad \dots(1)$$

$$U_7 = a + 6d = -3 \quad \dots(2)$$

$$4d = -12 \Rightarrow d = -3 \quad \text{ب طرح 1 من 2 ينتج:}$$

$$a + 2(-3) = 9 \Rightarrow a = 15 \quad \text{بالتعويض في (1):}$$

$$\therefore U_4 = a + 3d = 15 + 3(-3) = 6$$

$$U_5 = a + 4d = 15 + 4(-3) = 3$$

$$U_6 = a + 5d = 15 + 5(-3) = 0$$



### مثال 5

أوجد الحد الذي ترتيبه 200 في المتتابة الحسابية التي حدها الخامس = (-4) وأساسها = (12)

الحل :

وحيث أن  $d = 12$  نجد  $a$  باستخدام قانون الحد العام حيث:

$$U_n = a + (n - 1) d$$

$$U_5 = a + 4 d \Rightarrow -4 = a + 4 \times 12 \Rightarrow a = -52$$

$$U_{200} = a + 199 d$$

$$\therefore U_{200} = -52 + 199 \times 12 = 2336$$

### مثال 6

أوجد عدد حدود المتتابة الحسابية  $\langle -7, -4, -1, \dots, 113 \rangle$

الحل :

$$a = -7, d = -4 - (-7) = 3, U_n = 113$$

$$\therefore U_n = a + (n - 1) d$$

$$113 = -7 + (n - 1) \times 3 \Rightarrow 120 = 3(n - 1) \Rightarrow n = 41 \text{ عدد حدود المتتابة.}$$

### الأوساط الحسابية :

إذا كان لدينا العدان  $a, b$  وادخلنا بينهما الأعداد  $c, d, e, \dots$  كأوساط حسابية بين  $a, b$  حيث عدد الحدود = عدد الأوساط + 2

مثلاً إذا أدخلنا 6 أوساط حسابية بين 38 , 10 تتكون متتابة حسابية عدد حدودها  $8 = 2 + 6$

$$U_8 = 38, n = 8, a = 10, d = ? \text{ كذلك}$$

$$U_8 = a + 7 d \Rightarrow 38 = 10 + 7 d \Rightarrow 28 = 7 d \Rightarrow d = 4$$

$$10, [14, 18, 22, 26, 30, 34], 38 \text{ الأوساط.}$$



## [2-3-1] مجموع المتتابة الحسابية: Sum of an Arithmetic Sequence

إذا كونت ( $U_n$ ) متتابة حسابية فان مجموع  $n$  حداً الاولى فيها يرمز له بالرمز  $S_n$  أي أن:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad \text{حيث } U_n \text{ الحد الاخير}$$

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (U_n - d) + U_n$$

$$\therefore S_n = U_n + (U_n - d) + (U_n - 2d) + \dots + (a+d) + a \quad \text{وبعكس الترتيب}$$

$$2S_n = (a+U_n) + (a+U_n) + (a+U_n) + \dots + (a+U_n) + (a+U_n)$$

$$2S_n = n(a + U_n)$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$$

قانون ايجاد مجموع  $n$  من حدود المتتالية الحسابية إذا علم الحد الاول والاخير.

عندما نعوض الحد العام = (الحد الاخير  $U_n$ ) حيث:

$$U_n = a + (n - 1) d$$

$\therefore$  يصبح قانون المجموع بدلالة الحد الاول ( $a$ ) والاساس ( $d$ )

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1) d]$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

مثال 1

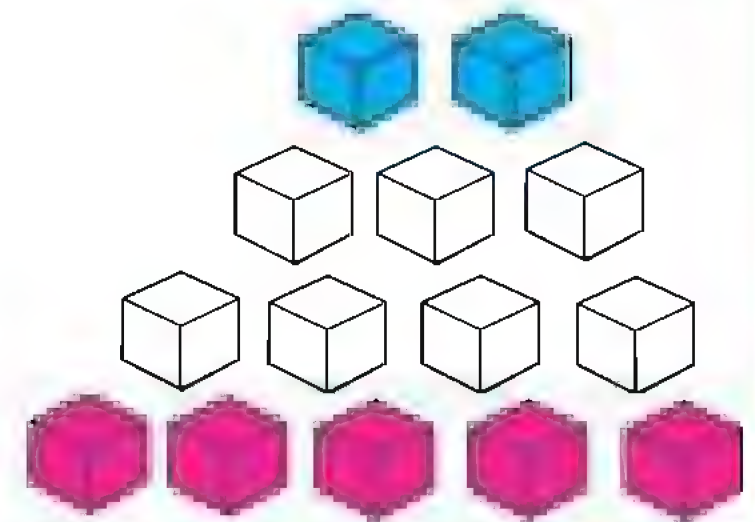
أوجد مجموع 4 حدود من المتتابة الحسابية التي حدها الاول = 2 وحدها الرابع = 5

الحل :

$$a = 2, U_4 = 5, n = 4, S_4 = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$$

$$S_4 = \frac{4}{2} [2+5] = 14$$



مثال 2

أوجد مجموع حدود المتتابة الحسابية  $<1, 2, 3, \dots, 100>$

الحل :

$$a = 1, U_n = 100, n = 100$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [a+U_n] = \frac{100}{2} [1+100] = 50 \times 101 = 5050$$



### مثال 3

متتابعة حسابية حدها الثاني = 4 وحدها ما قبل الاخير = 22 وعدد حدودها = 12 جد مجموعها.

**الحل:** في أية متتابعة حسابية يكون :

الحد الاول + الحد الاخير = الحد الثاني + الحد ما قبل الاخير

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [a + U_n] = \frac{12}{2} [4 + 22] = 6 \times 26 = 156$$

### مثال 4

جد مجموع ثمان حدود من المتتابعة الحسابية  $\langle -4, 1, 6, \dots \rangle$

**الحل:**

$$a = -4, \quad d = 5, \quad n = 8$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2} [2 \times (-4) + (8-1) \times 5]$$

$$S_8 = 4 [-8 + 35] = 4 \times 27 = 108$$

### مثال 5

ثلاث اعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها = 15 ومجموع مربعاتها = 83 فما هي الاعداد؟

**الحل:**

نفرض الاعداد الثلاثة:  $a - d, a, a + d$

$$\therefore \text{مجموع الاعداد: } 3a = 15$$

$$\therefore a = 5$$

$$\therefore \text{الاعداد } 5-d, 5, 5+d$$

$$(5-d)^2 + 25 + (5+d)^2 = 83$$

$$25 - 10d + d^2 + 25 + 25 + 10d + d^2 = 83$$

$$2d^2 + 75 = 83 \Rightarrow 2d^2 = 8 \Rightarrow d^2 = 4$$

$$\therefore d = \pm 2$$

عندما  $d = 2$   $\therefore$  الاعداد : 3 ، 5 ، 7 ( تصاعدية لان  $d > 0$  )

عندما  $d = -2$   $\therefore$  الاعداد : 7 ، 5 ، 3 ( تنازلية لان  $d < 0$  )



## خواص المتتابعة الحسابية :

- 1 إذا أضيفت كمية ثابتة الى كل حد من حدود المتتابعة الحسابية، أو طرحت كمية ثابتة من حدود المتتابعة الحسابية، كانت الكميات الناتجة مكونة متتابعة حسابية ايضاً أساسها أساس المتتابعة الأصلية .
- 2 إذا ضرب كل حد من حدود متتابعة حسابية في مقدار ثابت أو قسم على مقدار ثابت كونت الكميات الناتجة متتابعة حسابية ايضاً بأساس يختلف عن المتتابعة الأصلية.
- 3 حاصل جمع أو طرح متابعتين حسابيتين يكون متتابعة حسابية أساسها هو المجموع أو الفرق بين أساسي المتابعتين.

## تمارين (2-2)

- 1 لكل فقرة أربع أجابات واحدة منها فقط صحيحة، اختر الاجابة الصحيحة:  
المتتابعة  $<2n+1>$

أ. أساسها = 2 وحدها العاشر = 13

ب. أساسها = 1 وحدها العاشر = 21

ج. أساسها = 2 وحدها العاشر = 21

د. أساسها = 2 وحدها العاشر = 19

ثانياً: إذا كان  $<-1, 2, x, 8>$  متتابعة حسابية فإن  $x = \dots$

أ. -3 ب. 3 ج. 5 د. 11

ثالثاً: إذا كان  $<-3, x, 11>$  متتابعة حسابية فإن  $x = \dots$

أ. 7 ب. 4 ج. 8 د. 14

رابعاً: في المتتابعة الحسابية  $<3, 7, 11, \dots, x, 63>$   $x = \dots$

أ. 15 ب. 33 ج. 59 د. ليس أي مما سبق

- 2 اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل من المتتابعات الحسابية التي فيها:

لأولاً:  $a = -5$  ،  $d = 3$

ثانياً:  $a = -20$  ،  $d = -4$

ثالثاً:  $a = -3$  ،  $U_{n+1} = U_n + 4$

رابعاً:  $U_n = (5n - 9)$

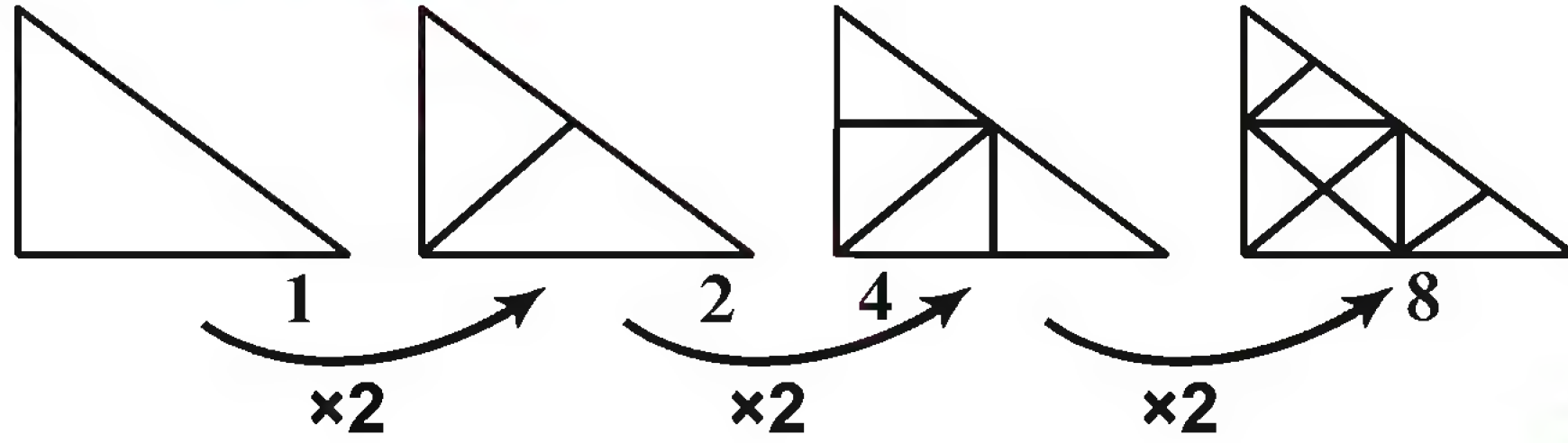
3. جد الحد السابع عشر من المتتابعة الحسابية  $\langle -15, -12, -9, \dots \rangle$
4. جد عدد حدود المتتابعة الحسابية  $\langle 55, \dots, -20, -17, -14 \rangle$  ثم جد مجموعها .
5.  $\langle x^2 + 1, 2x^2 + 1, 2x^2 + x + 3, \dots \rangle$  متتابعة حسابية.  
جد قيمة  $x$ ؟ وما حدها السابع؟
6. إذا أدخلنا ستة أوساط حسابية بين 2 , 30 فما هذه الأوساط؟
7. جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = 8 وحدها الثامن عشر = -31
8. أي حد في المتتابعة الحسابية  $\langle \dots, -1, -5, -9 \rangle$  يكون مساوياً 87 ، هل يوجد حد في هذه المتتابعة = 333؟
9. متتابعة حسابية حدها الرابع = -1 وحاصل ضرب حديها الثاني والثالث = 10 فما حدها العاشر؟
10. إذا كانت :  $\langle A, 7, \dots, B, 25 \rangle$  متتابعة حسابية وكانت  $B = 5A + 2$  فما قيمة  $A, B$  ؟ وما عدد حدود المتتابعة؟
11. أثبت أن مجموع  $n$  حداً الأولى من الأعداد الفردية الموجبة  $\langle \dots, (2n-1), \dots, 5, 3, 1 \rangle$  هو  $n^2$
12. كم حداً يؤخذ من المتتابعة الحسابية  $\langle \dots, 17, 21, 25 \rangle$  ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها = -14 ؟
13. جد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين 400 ، 100 وتقبل القسمة على 3.



## [2 - 4] المتتابعة الهندسية: Geometric Sequence

وهي متتابعة ليس فيها حد يساوي الصفر، وناتج قسمة كل حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عدداً حقيقياً ثابتاً وهذا العدد يسمى أساس المتتابعة الهندسية

(النسبة المشتركة Common Ratio) ويرمز له بالرمز  $r = U_{n+1}/U_n$  حيث  $r \in \mathbb{R}$



مثال

بين نوع المتتابعات:

$\langle 2, 3, 5, 7, 11, \dots \rangle$  لا تمثل متتابعة حسابية ولا هندسية

$\langle 1, 2, 4, 8, \dots \rangle$  متتابعة هندسية لأن :

$$r = 2/1 = 4/2 = 8/4 = 2$$

$\langle 81, -27, 9, -3, \dots \rangle$  متتابعة هندسية أساسها  $-1/3$

$\langle 4, 4, 4, 4, \dots \rangle$  متتابعة ثابتة هي حسابية أساسها  $0$  وهندسية أساسها  $1$

$\langle 7, 11, 15, 19, \dots \rangle$  متتابعة حسابية أساسها  $4$

ملاحظات:

1 إذا كان (a) موجب وإن

- $r < 1$  (موجب) متتابعة هندسية تنازلية
- $r = 1$  متتابعة هندسية ثابتة
- $r > 1$  متتابعة هندسية تصاعدية
- $r < 1$  (سالب) متتابعة هندسية الاشارات فيها تأخذ حالة التناوب الاول موجب والثاني سالب وهكذا

2 إذا كان (a) سالب وإن

- $r < 1$  (موجب) هندسية تصاعدية
- $r = 1$  هندسية ثابتة
- $r > 1$  هندسية تنازلية
- $r < 1$  (سالب) هندسية اشارات الحدود فيها تأخذ حالة التناوب الاول سالب والثاني موجب وهكذا

### فمثلاً:

هندسية تنازلية	$\langle 4, 2, 1, 1/2, \dots \rangle$	$r=1/2, a=4$
هندسية ثابتة	$\langle 4, 4, 4, 4, \dots \rangle$	$r=1, a=4$
هندسية تصاعدية	$\langle 4, 8, 16, 32, \dots \rangle$	$r=2, a=4$
هندسية متناوبة الاشارة	$\langle 4, -2, 1, -1/2, \dots \rangle$	$r=-1/2, a=4$

ثم

هندسية تصاعدية	$\langle -4, -2, -1, -1/2, \dots \rangle$	$r=1/2, a=-4$
هندسية ثابتة	$\langle -4, -4, -4, -4, \dots \rangle$	$r=1, a=-4$
هندسية تنازلية	$\langle -4, -8, -16, \dots \rangle$	$r=2, a=-4$
هندسية متناوبة الاشارة	$\langle -4, 2, -1, 1/2, \dots \rangle$	$r=-1/2, a=-4$

### [2-4-1] الحد العام للمتتابعة الهندسية General Term For Geometric Sequence

المتتابعة الهندسية التي حدها الاول  $a$  وأساسها  $r$  هي:

$$\langle a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots \rangle$$

ويكون:

$$U_1 = a = ar^0 = ar^{(1-1)}$$

$$U_2 = ar^1 = ar^{(2-1)}$$

$$U_3 = ar^2 = ar^{(3-1)}$$

$$U_4 = ar^3 = ar^{(4-1)}$$

.

.

$$U_n = ar^{n-1}$$

قانون الحد العام للمتتابعة الهندسية

### مثال 1

اكتب الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول  $64$  وأساسها  $-1/2$

الحل:

$$\langle 64, \overset{\times(-\frac{1}{2})}{-32}, \overset{\times(-\frac{1}{2})}{16}, \dots \rangle$$

المتتابعة الهندسية هي  $\langle 64, -32, 16, -8, 4, -2 \rangle$



## مثال 2

جد الحد السابع من متتابعة هندسية حدها الاول =  $-1/4$  وأساسها = 2.

الحل:

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore U_7 = (-1/4) (2^{7-1}) = -\frac{1}{4} \times 2^6 = -\frac{1}{4} \times 64 = -16$$

## مثال 3

متتابعة هندسية حدها الاول = 3 وحدها الخامس = 48 جد حدها الثامن .

الحل :

$$U_1 = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$U_5 = ar^4 \Rightarrow 48 = 3 r^4$$

$$\therefore r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$r = 2 \text{ عندما}$$

$$U_8 = ar^7 = 3 \times (2)^7 = 3 \times 128 = 384$$

$$r = -2 \text{ عندما}$$

$$U_8 = ar^7 = 3 (-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$$

## مثال 4

مجموع الحدود الثلاثة الاولى من متتابعة هندسية حدودها موجبة = 7 وحدها الثالث = 1 فما حدها السادس؟

الحل:

$$U_1 + U_2 + U_3 = 7$$

$$a + ar + ar^2 = 7$$

$$\therefore a (1 + r + r^2) = 7 \dots\dots(1)$$

$$U_3 = 1 \Rightarrow ar^2 = 1$$

$$\therefore a = 1/r^2 \dots\dots(2)$$

$$\frac{1}{r^2} (1 + r + r^2) = 7 \quad \text{بتعويض 2 في 1 :}$$

$$\therefore 1 + r + r^2 = 7 r^2 \Rightarrow 6r^2 - r - 1 = 0$$

$$(3r+1) (2r-1) = 0$$

إما  $r = -1/3$  يهمل لأن حدود المتتابعة موجبة.

$$\therefore a = 1/(1/2)^2 = 4 \quad \text{أو} \quad r = 1/2$$

$$U_6 = ar^5 = 4 (1/2)^5 = 4 \times 1/32 = 1/8$$

## الأوساط الهندسية :

إذا كان لدينا العددين  $a, f$  وأدخلنا بينهما الأعداد المرتبة  $b, c, d, \dots, e$  بحيث  $\langle a, b, c, d, \dots, e, f \rangle$  تكون متتابعة هندسية فإن الأعداد  $b, c, d, \dots, e$  تسمى أوساط هندسية بين  $a, f$  ويكون عدد حدود المتتابعة الهندسية الناتجة = ( عدد الأوساط + 2 )

### مثال

أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين 4 ، 128

$$a = 128, \quad n = 6, \quad U_6 = 4$$

$$\therefore U_6 = ar^5 \Rightarrow 4 = 128r^5 \Rightarrow r^5 = 1/32 = (1/2)^5$$

$$\therefore r = 1/2$$

$\therefore$  الأوساط الهندسية : 64, 32, 16, 8

والمتتابعة الهندسية هي  $\langle 128, 64, 32, 16, 8, 4 \rangle$

## مجموع المتتابعة الهندسية Sum of a Geometric Sequence

أوضحنا في البند السابق أن المتتابعة الهندسية التي حدها الأول  $a$  وأساسها  $r$  هي :  $\langle a, ar, ar^2, ar^3, \dots \rangle$  فإذا اخترنا  $(n)$  حداً الأولى من المتتابعة فتكون الحدود المختارة هي :  $\langle a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1} \rangle$

ومجموع هذه الحدود والذي يرمز له بالرمز  $S_n$  هو :

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

بضرب طرفي (1) في  $r$  ينتج :

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad (2)$$

بطرح (2) من (1) :

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\therefore S_n = a(1-r^n)/(1-r) \quad \dots \quad r \neq 1$$

قانون المجموع

ملاحظة :

إذا كانت  $r=1$  فإن المتتابعة الهندسية تصبح  $\langle a, a, a, \dots \rangle$  ويكون المجموع إلى  $(n)$  من

$$S_n = a + a + a + \dots$$

$$\therefore S_n = na$$



### مثال 1

جد مجموع الستة حدود الاولى من المتتابعة الهندسية  $\langle 64, 32, 16, \dots \rangle$

**الحل :**

$$a = 64, \quad n = 6, \quad r = 1/2$$

$$\therefore S_n = a(1-r^n)/(1-r) \Rightarrow S_6 = 64[1 - (1/2)^6]/(1 - 1/2) = 64[1 - 1/64]/1/2$$

$$S_6 = (64-1) / 1/2 = 2 \times 63 = 126$$

### [2-4-2] المتتابعة الهندسية اللانهائية: Infinite Geometric Sequence

إن التعريف الذي أعطي لمجموع حدود المتتابعة يصلح لكل المتتابعات المنتهية وغير المنتهية على حد سواء . وفي حالة المتتابعات الحسابية غير المنتهية فاننا لا نستطيع إيجاد المجموع لحدودها كافة لأن المجموع يكون إما كبير جداً أو صغير جداً فمثلاً أننا لا نستطيع إيجاد :

$$1+5+9+13+17+ \dots$$

$$\dots -5-4-3-2-1 \text{ أو}$$

أما بالنسبة للمتتابعة الهندسية غير المنتهية ( اللانهائية ) فان الامر مختلف كلياً :

$$S_n = a(1-r^n)/(1-r) = a/(1-r) - ar^n/(1-r)$$

$$\text{وعندما } -1 < r < 1$$

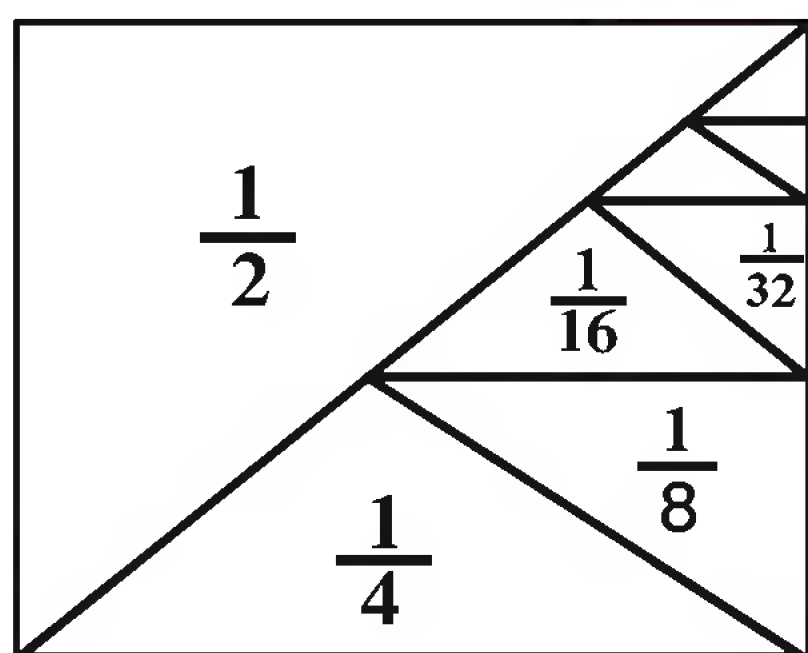
فإن  $(r^n)$  تقترب من الصفر كلما زادت  $n$  زيادة كبيرة غير محددة لذلك فإن  $ar^n/(1-r)$  يقترب من الصفر .

**فيكون قانون مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية**

$$\therefore S_{\infty} = a/(1-r)$$

يصلح هذا القانون فقط عندما  $-1 < r < 1$

ولا يصلح هذا القانون عندما  $r \geq 1$  أو  $r \leq -1$



### مثال 2

$$\text{جد } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

**الحل**

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$$

### مثال 3

جد مجموع

$$0.4 + 0.04 + 0.004 + \dots$$

الحل :

$$a = 0.4, \quad r = 0.04/0.4 = 0.1$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9}$$

### مثال 4

جد ناتج

$$64 - 16 + 4 - 1 + \dots$$

الحل :

$$a = 64, \quad r = -1/4$$

$$S_{\infty} = a/(1-r) = 64/(1 + 1/4) = 4 \times 64/5 = 256/5$$

تمارين (2 - 3)

1. أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خاطئة:

أ. إذا كان  $r$  أساس المتتابعة الهندسية  $\langle U_n \rangle$  فإن  $U_5 = r^2 U_3$

ب. أساس المتتابعة الهندسية  $\langle 1, -1, 1, -1, \dots \rangle$  هو (1)

ج. إذا كانت  $\langle 32, b, 2, -1/2, \dots \rangle$  متتابعة هندسية فإن  $b = -8$

د. إذا كان أساس المتتابعة الهندسية موجباً فإن جميع حدودها موجبة.

هـ. إذا كانت  $\langle 4, x, 16 \rangle$  متتابعة هندسية فإن  $x = -8$

و. إذا كانت  $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$  متتابعة هندسية فإن:

$$a_1/a_2 = a_3/a_4$$

ز. إذا كان  $U_n = 3 U_{n+1}$  حد من حدود متتابعة هندسية فإن أساسها  $3$

2. اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الهندسية الآتية التي فيها :

أ.  $r = 1/3, \quad a = 81$

ب.  $r = -2, \quad a = 1/32$

ج.  $r = -2/3, \quad a = 27$

د.  $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n, \quad a = -8$

هـ.  $r = 2, \quad a = 2$



- 3 جد الحد الثامن من المتتابة الهندسية  $\langle 2, 1, 1/2, \dots \rangle$
- 4 متتابة هندسية حدها الرابع  $= -8$  وحدها السابع  $= -64$  فما حدها الاول وما أساسها ؟
- 5 أدخل 9 أعداد بين 3,96 بحيث تكون مع هذين العددين متتابة هندسية .
- 6 مجموع الحدين الاول والثاني من متتابة هندسية  $= -32$  ومجموع حديها الرابع و الخامس  $= -4$  فما حدها السابع ؟
- 7 اكتب المتتابة الهندسية التي مجموع الحدود الستة الاولى منها 504 وأساسها  $= 2$
- 8 إذا كان مجموع متتابة هندسية أساسها  $= 3$  هو 728 وحدها الاخير هو 486 جد حدها الاول وعدد حدودها .
- 9 متتابة هندسية موجبة الحدود حاصل ضرب حدودها الثلاثة الاولى  $1/27$  ومجموع حدودها الثاني والثالث والرابع  $13/27$  أوجد المتتابة؟ ثم جد مجموعها الى ما لانهاية؟
- 10 ثلاثة اعداد مكونة متتابة حسابية مجموعها (18) ولو اضيفت الاعداد 1،2،7 الى حدودها على الترتيب لتألف من الاعداد الناتجة متتابة هندسية فما هذه الاعداد ؟
- 11 اذا كان مجموع ثلاثة اعداد تؤلف متتابة هندسية يساوي (70) فإذا ضربنا كل من حدها الأول والثالث في (4) وحدها الثاني في (5) كانت الأعداد الناتجة تؤلف متتابة حسابية فما هذه الأعداد ؟

$$\langle 1, 1/3, 1/9, 1/27 \rangle$$

$$S_{\infty} = 3/2$$

## Chapter 3

### القطوع المخروطية Conic Sections

- نبذة تاريخية
- مقدمة
- [3-1] الدائرة
- [3-2] معادلة الدائرة القياسية
- [3-2-1] معادلة الدائرة اذا مست احد المحورين أو كليهما
- [3-2-2] المعادلة العامة للدائرة

الرمز أو العلاقة الرياضية	المصطلح
$c (h,k)$	مركز الدائرة
$r$	نصف قطر الدائرة
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	القياسية معادلة الدائرة
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	العامة



## القطوع المخروطية

### نبذة تاريخية:

في الألفية الثالثة قبل الميلاد كان قدماء البابليين والمصريين رواداً في الهندسة حيث طوروا صيغاً لإيجاد المساحات وحجوم بعض المجسمات البسيطة وأستخدموا الهندسة لقياس مساحة الأرض وحساب المثلثات لقياس الزوايا والميل في البناء وكان البابليون يستعملون الهندسة في التنبؤ بمواعيد كسوف الشمس وخسوف القمر. وكان المصريون يستخدمون الهندسة في بناء المعابد وتحديد زوايا الأهرامات وتحديد مساحة الدائرة بالتقريب. وفي القرن الثالث قبل الميلاد عني الأغريق بدراسة الأشكال للسطوح حيث ظهر في العصر اليوناني رياضيون ننوه بثلاثة منهم:

■ أقليدس (283 ق.م) الذي حظي كتابه ((الاصول)) عند العرب بما لم يحظ به مؤلف رياضي آخر حيث تناول في المقالة الثالثة من كتابه عن الدائرة.

■ أرخميدس (أرشميدس) (212 ق.م) كان بالنسبة للعرب رائداً في الهندسة المساحية والميكانيكية ، عرفوا قدرأ عن قليل من كتبه وخاصة كتاب الدائرة وقياسها حيث في القرن الثالث قبل الميلاد عمم هذا العالم الاغريقي طريقة (الاستفاد) مستخدماً مضلعاً من 96 ضلعاً لتعريف الدائرة .

■ أبو اللونيوس (180 ق.م) أتجه هذا العالم نحو القطاعات المخروطية فحدد أشكالها وبيّن خواصها وعلاقاتها وقد عرف له العرب ذلك واحتفظوا بقدر من مؤلفاته وأهمها كتاب المخروطات يقع في ثمان مقالات .

وفي العصر الاسلامي كانت عناية العالم العربي ابن سينا بالكتاب فاقت بكثير عناية غيره فالجزء الهندسي من رياضيات كتاب الشفاء خير دليل على ذلك.

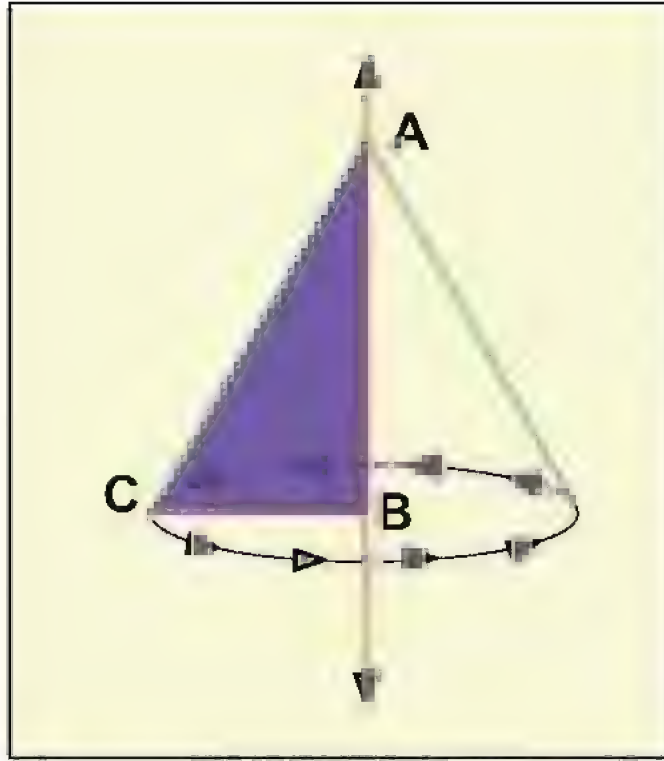
أما الدور الذي قام به العلماء العرب فهو الذي مهد الأذهان والعقول للدوار التي قام بها البشر فيما بعد ومنهم محمد بن محمد بن يحيى البوزجاني ولد سنة 328 هـ حيث أستطاع أن يجد حلولاً تتعلق بالقطع المكافئ الذي مهد لعلماء ورجال الفكر العربي أن يتقدموا خطوات بالهندسة التحليلية قادتهم الى علم التفاضل والتكامل الذي يعد أروع ما توصل اليه العقل البشري والذي سهل عملية الاختراعات.



ابن سينا



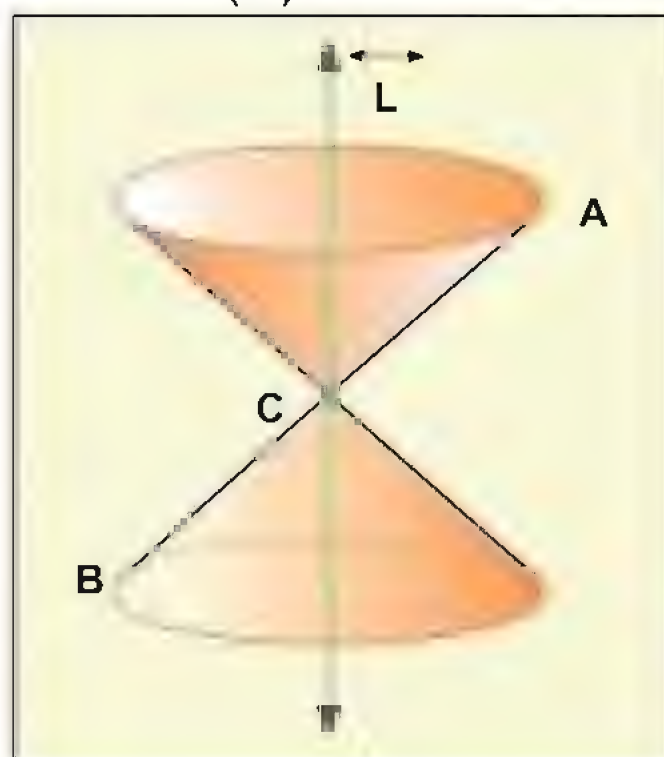
يتولد المخروط الدائري القائم من دوران المثلث  $A B C$  القائم الزاوية في  $B$  دورة كاملة حول



شكل (1)

أحد الضلعين القائمين كمحور الدوران كما في الشكل (1)  
الآن تأمل المخروط الدائري القائم في الشكل (2)  
الناتج من دوران مستقيم حول محور ثابت وبزاوية  
ثابتة بين المستقيم والمحور. سيتولد من هذا الدوران  
مخروط من مولدين يتقاطعان في الرأس  $(C)$ .

ويسمى كل من  $L$  بمحور المخروط،  $A B$



شكل (2)

بمولد المخروط (محور المخروط الدائري القائم يساوي  
قطعة المستقيم المحددة بالرأس ومركز القاعدة والمولد هو  
قطعة المستقيم المحددة بالرأس واحدى نقط محيط القاعدة)  
والحصول على القطوع المخروطية (أشكال هندسية) هندسياً  
من قطع المخروط الدائري القائم بمستوى ضمن شرط خاص  
لكل حالة (ضمن مفهوم الهندسة الأقليدية) فإذا قطع سطح  
المخروط الدائري القائم.

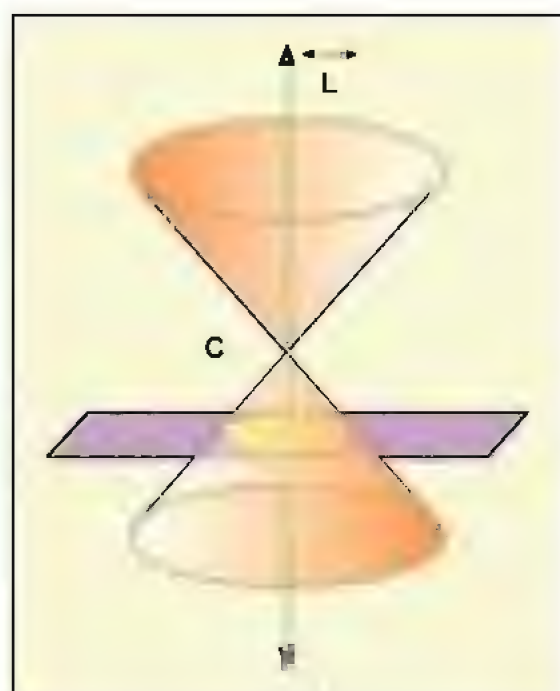
**أولاً:** بمستوى عمودي على المحور  $L$  ويوازي القاعدة ولا يحتوي على الرأس  $(C)$  فإن المقطع يمثل

دائرة (Circle) وتكبر هذه الدائرة كلما ابتعدنا عن الرأس والعكس صحيح. كما في الشكل (3)

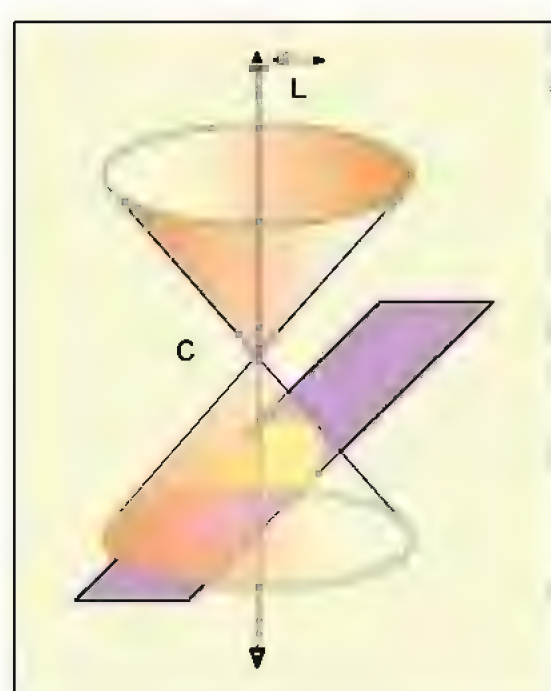
**ثانياً:** بمستوى موازٍ لأحد مولداته فإن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع المكافئ  $Parabola$ .  
كما في الشكل (4).

**ثالثاً:** بمستوى غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي أحد مولداته فإن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى بالقطع  
الناقص (Ellipse). كما في الشكل (5).

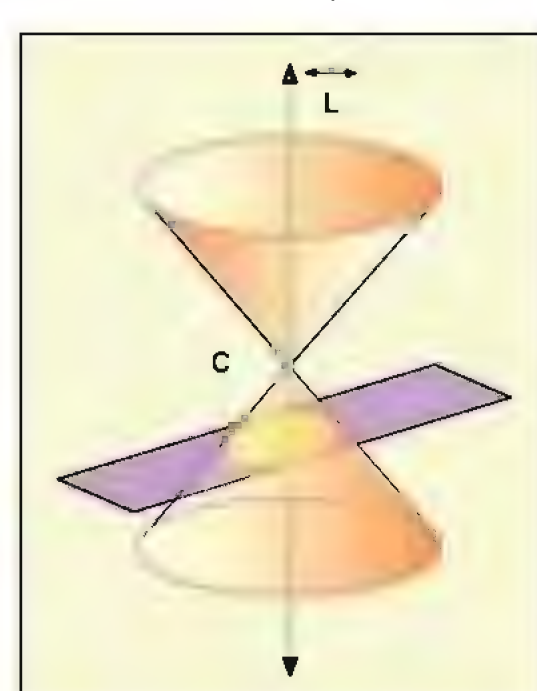
**رابعاً:** بمستوى يوازي محوره  $L$  ويقطع مولدين من مولدات المخروط الدائري القائم فإن المقطع يمثل  
شكلاً هندسياً يسمى بالقطع الزائد (Hyperbola). كما في الشكل (6)



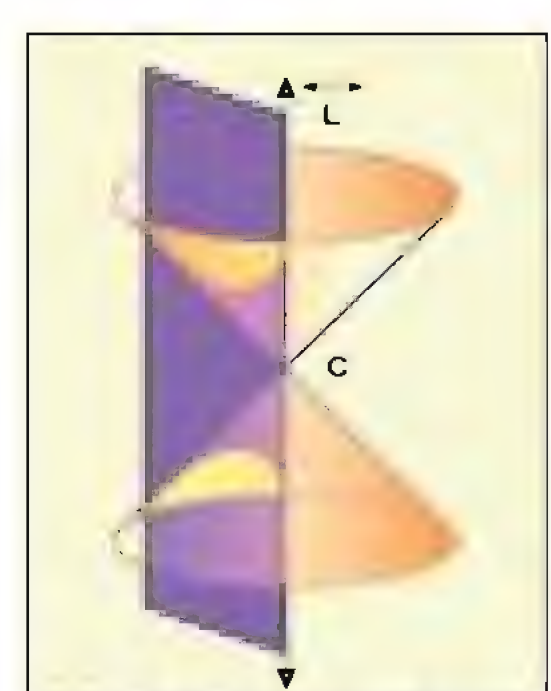
شكل (3)



شكل (4)



شكل (5)



شكل (6)

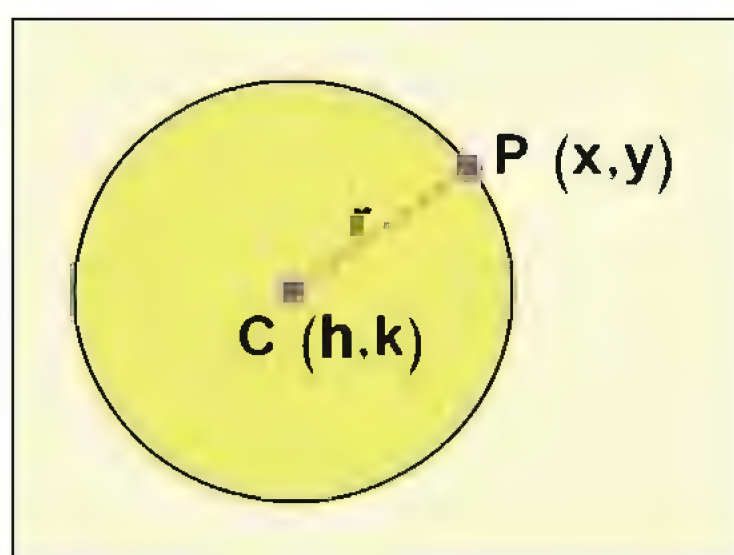


### [3-1] الدائرة (Circle):

هي مجموعة النقط في المستوي التي يكون بعدها من نقطة ثابتة تسمى (المركز Center) يساوي مقداراً ثابتاً يسمى ( نصف القطر Radius). لذا سنرمز لمركز الدائرة بالرمز  $C(h, k)$  ، ونرمز لنصف قطر الدائرة بالرمز  $(r)$ . أي أن الدائرة بلغة المجموعات

$$\text{Circle} = \{ p: p c = r , r > 0 \}$$

حيث  $p(x, y)$  هي نقطة (point) في المستوي (plane)



### [3-2] معادلة الدائرة القياسية Characteristic Equation of Circle

دائرة مركزها  $C(h, k)$  ، ونصف قطرها  $(r)$  من الوحدات حيث  $r > 0$  والنقطة  $p(x, y)$  نقطة في المستوي الأحداثي فإن :

$$p c = r$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

$$\Rightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

حالة خاصة:

في حالة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل  $(0, 0)$  ونصف قطرها  $(r)$  تصبح الصيغة القياسية

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{لمعادلة الدائرة هي :}$$

أمثلة:

مثال 1

جد معادلة الدائرة التي مركزها  $(3, 5)$  ونصف قطرها  $(4)$  وحدات

الحل:

من الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\therefore (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$\therefore (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

## مثال 2

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها (6) وحدات

الحل :

$$C(h, k) = C(0, 0), \quad r = 6 \text{ وحدات}$$

$$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\therefore (x + 0)^2 + (y - 0)^2 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36$$

## مثال 3

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها  $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 49$

الحل :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$c(h, k) = c(5, -3)$$

$$\therefore r^2 = 49 \Rightarrow r = \sqrt{49} = 7 \text{ وحدات}$$

## ملاحظة :

لقد تعلمت في الصف الرابع العلمي بعض القوانين منها:

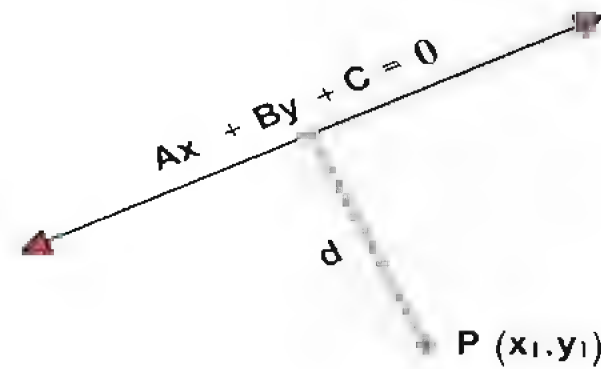
أولاً: قانون البعد (المسافة) بين نقطتين  $p_1(x_1, y_1)$ ,  $p_2(x_2, y_2)$  يعطى بالعلاقة

$$p_1 p_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ثانياً: قانون البعد بين المستقيم  $L$  الذي معادلته  $Ax + By + C = 0$  والنقطة الخارجة عنه

$p(x_1, y_1)$  يعطى حسب العلاقة

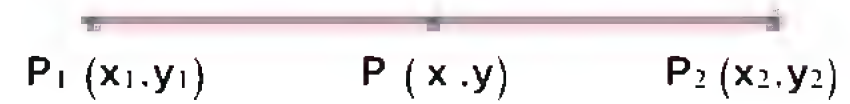
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ثالثاً: تنصيف قطعة مستقيم  $\overline{p_1 p_2}$  حيث  $p_1(x_1, y_1)$ ,  $p_2(x_2, y_2)$  في المستوي الاحداثي المتعامد

ويعطى حسب العلاقة

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



$$\therefore p(x, y) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

نقطة التنصيف



أمثلة :

### مثال 1

جد معادلة الدائرة التي مركزها  $c(4, 3)$  وتمر بالنقطة  $p(2, 1)$

الحل :

$$\therefore p c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore p c = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$\therefore r = p c = \sqrt{8}$$

$$\therefore (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8 \quad \text{المعادلة القياسية للدائرة}$$

### مثال 2

جد معادلة الدائرة التي نهايتي أحد أقطارها النقطتان  $p_1(4, 5)$  ,  $p_2(-2, 3)$

الحل :

$$\overline{p_1 p_2} \quad \text{منتصف} \quad c(x, y)$$

$$\therefore x = (x_1 + x_2)/2 = (4 + (-2))/2 = (4-2)/2 = 1$$

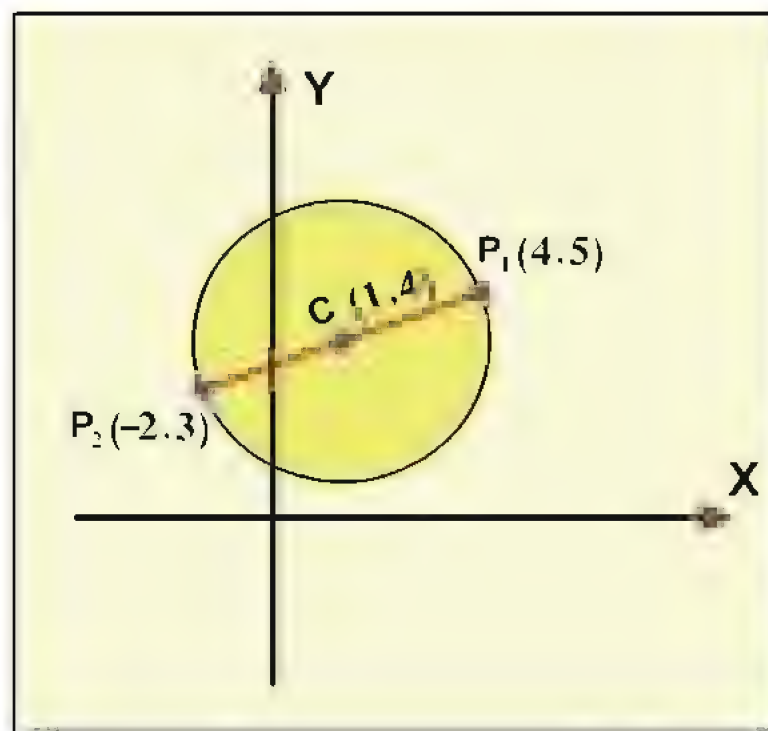
$$y = (y_1 + y_2)/2 = (5 + 3)/2 = 8/2 = 4$$

$$\therefore c(1, 4)$$

$$\therefore r = p_1 c = \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \text{ units}$$

$$\therefore r = \sqrt{10} \text{ unit}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10 \quad \text{المعادلة القياسية}$$



**ملاحظة:** طريقة ثانية في إيجاد معادلة الدائرة عن طريق استخدام القاعدة التالية:

إذا كانت  $p_1(x_1, y_1)$  ,  $p_2(x_2, y_2)$  هي إحداثيات نهايتي قطر فيها فإن معادلة الدائرة هي:

$$x^2 + y^2 - x(x_1 + x_2) - y(y_1 + y_2) + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

فيكون حل المثال السابق هو

$$x^2 + y^2 - x(4+(-2)) - y(5+3) + 4(-2) + (5)(3) = 0$$

$$x^2 + y^2 - x(2) - 8y - 8 + 15 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$$

لاحظ المعادلة القياسية في الحل الاول للمثال.

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

هي

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$$

وبتبسيط المعادلة

مثال 3

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم  $3x - 4y - 15 = 0$

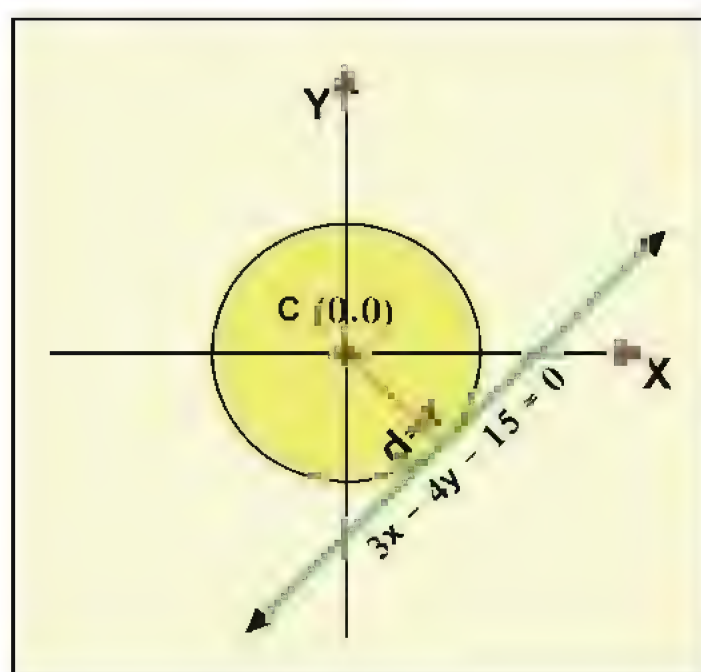
$$d = \frac{|3x_1 - 4y_1 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|(3)(0) - (4)(0) - 15|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-15|}{5}$$

الحل :

$$d = 15/5 = 3 \text{ units}$$

$$\therefore d = r = 3 \text{ units}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 9$$



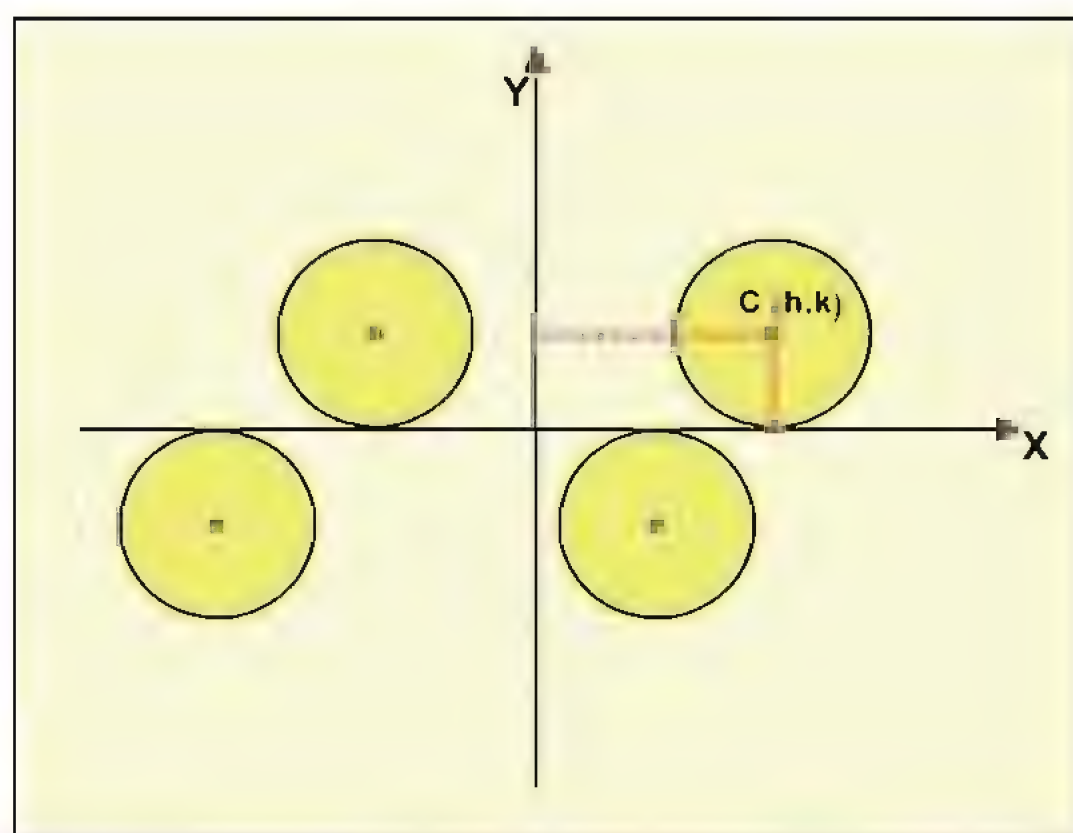
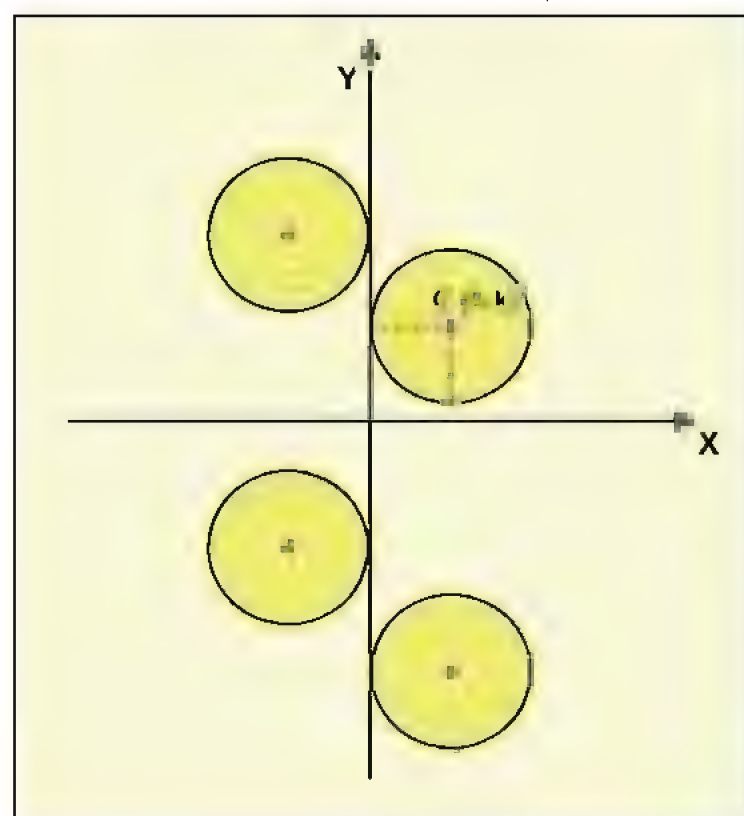
[3-2-1] معادلة الدائرة اذا مست أحد المحورين أو كليهما.

اذا مست الدائرة التي مركزها  $(h, k)$  ونصف قطرها  $(r)$

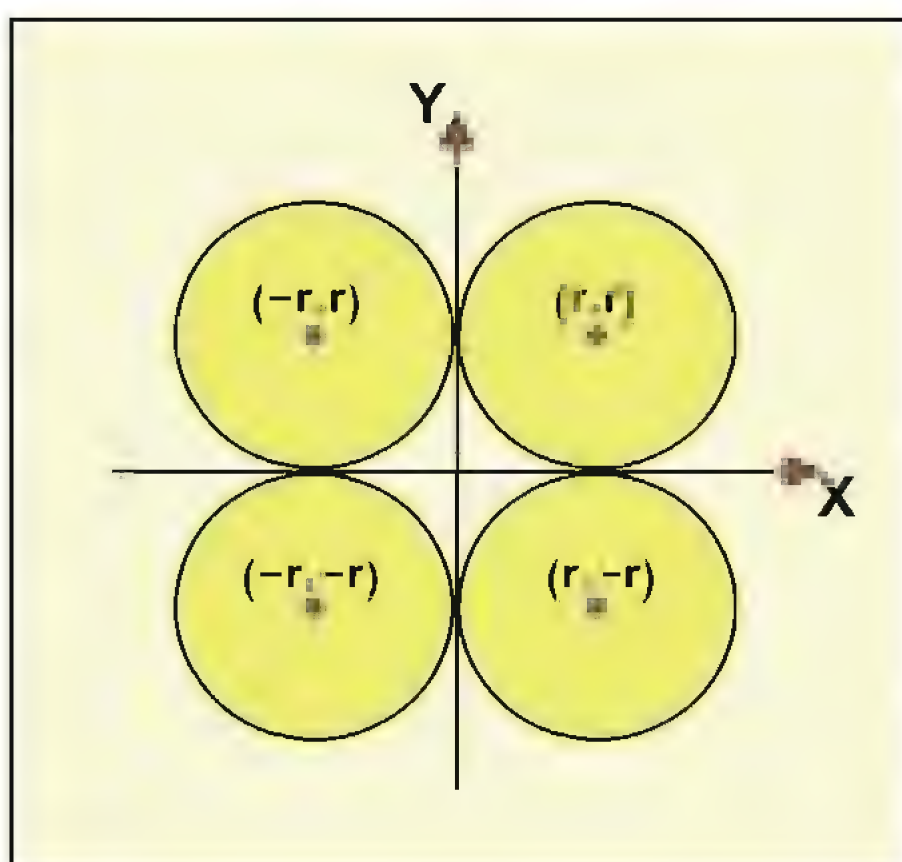
• محور السينات فإن  $r = |k|$  ونقطة التماس هي  $(h, 0)$

• محور الصادات فإن  $r = |h|$  ونقطة التماس هي  $(0, k)$

• المحورين الأحداثيين فإن  $r = |h| = |k|$  ونقطتا التماس هما  $(h, 0)$  ،  $(0, k)$







فإذا الدائرة تماس المحورين وتقع في

أولاً: الربع الأول يكون مركزها  $(r, r)$

ثانياً: الربع الثاني يكون مركزها  $(-r, r)$

ثالثاً: الربع الثالث يكون مركزها  $(-r, -r)$

رابعاً: الربع الرابع ويكون مركزها  $(r, -r)$

أمثلة :

مثال I

جد معادلة الدائرة التي تماس المحور السيني ومركزها  $(3, 2)$

الحل :

بما أن الدائرة تماس المحور السيني

$$\therefore r = |k| = |2| = 2 \text{ unit}$$

$$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\therefore (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

وبتبسيط المعادلة نحصل على

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \quad \text{المعادلة العامة}$$

ملاحظة :

يمكن إيجاد معادلة الدائرة التي تماس المحور السيني بطريقة أخرى حسب القاعدة.

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$$

حيث يكون الحل حسب هذه القاعدة للمثال الأول

$$x^2 + y^2 - 2(3x) - 2(2y) + (3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \quad \text{المعادلة}$$

مثال 2

جد معادلة الدائرة التي تماس المحور الصادي ومركزها  $(4, -1)$

الحل :

بما أن الدائرة تماس المحور الصادي

$$\therefore r = |h| = |4| = 4 \text{ units}$$

$$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\therefore (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16 \quad \text{المعادلة القياسية}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \quad \text{بالتبسيط}$$



### ملاحظة:

يمكن إيجاد معادلة الدائرة التي تمس المحور الصادي بطريقة أخرى حسب القاعدة.

$$x^2 + y^2 - 2 h x - 2 k y + k^2 = 0$$

فيكون الحل حسب القاعدة

$$x^2 + y^2 - 2 h x - 2 k y + k^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2 (4)x - 2 (-1)y + (-1)^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \quad \text{المعادلة}$$

### مثال 3

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الأحداثيين ومركزها  $(4, -4)$

بما أن الدائرة تمس المحورين

الحل :

$$\therefore r = |h| = |k|$$

$$\therefore r = |4| = |-4| = 4 \quad \text{units}$$

$$\therefore r = 4 \quad \text{units}$$

$$\therefore (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16 \quad \text{المعادلة القياسية}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0 \quad \text{المعادلة العامة}$$

### ملاحظة:

يمكن إيجاد معادلة الدائرة بطريقة أخرى بتطبيق القاعدة في الملاحظة (1) أو (2) حيث

نحصل على المعادلة

$$x^2 + y^2 - 2 (4)x - 2 (-4) y + 16 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$$

### مثال 4

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتقع في الربع الثالث ونصف قطرها 5 وحدات

الحل :

بما أن الدائرة تمس المحورين وتقع في الربع الثالث

$$\therefore C (-r, -r) = C (-5, -5)$$

$$\therefore (x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25 \quad \text{المعادلة القياسية}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0 \quad \text{وبالتبسيط}$$



يمكن حل المثال بطريقة أخرى بتطبيق المعادلة حيث يكون الحل

$$x^2 + y^2 - 2h x - 2k y + C = 0$$

$$C(-5, -5) = (h, k)$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2(-5)x - 2(-5)y + 25 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$$

### مثال 5

جد معادلة الدائرة المارة بالنقطة  $p(2, 1)$  وتمس المحورين الإحداثيين.

الحل:

بما أن الدائرة تمس المحورين الإحداثيين

$$\therefore r = |h| = |k|$$

$$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \dots\dots\dots(1)$$

نعوض عن  $k = r$ ,  $h = r$  في معادلة (1)

$$\Rightarrow (x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

$p(2, 1)$  تحقق معادلة الدائرة

$$\therefore (2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2$$

$$\therefore 4 - 4r + r^2 + 1 - 2r + r^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r - 5)(r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow r = 5 \quad \text{or} \quad r = 1$$

$$\therefore r = 5 \Rightarrow C(5, 5)$$

$$\therefore (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad \text{المعادلة (1)}$$

$$\text{or } r = 1 \Rightarrow C(1, 1)$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \text{المعادلة (2)}$$

## [3-2-2] المعادلة العامة للدائرة General Equation of Circle

معادلة الدائرة بصورتها العامة ناتجة من تبسيط المعادلة القياسية

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + C = 0 \quad \text{تصبح المعادلة}$$

$$A = -2h, \quad B = -2k \quad \text{وإذا فرضنا}$$

$$C = h^2 + k^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad \text{تصبح معادلة الدائرة بالصورة}$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - C} > 0, \quad K = -B/2, \quad h = -A/2 \quad \text{أي أن}$$

ملاحظة:

من المعادلة العامة للدائرة نلاحظ أن

\* معادلة من الدرجة الثانية للمتغيرين  $x, y$

\* معامل  $x^2 =$  معامل  $y^2$  ((الافضل ان يكون 1))

\* المعادلة خالية من الحد  $xy$

\*  $r > 0$  أي أن  $\sqrt{h^2 + k^2 - C} > 0$

أمثلة:

مثال 1

أي المعادلات الآتية يمثل معادلة دائرة:

a.  $x^3 + y^3 - 2x + 6y - 9 = 0$

b.  $3x^2 - 3y^2 - 2x + 6y - 19 = 0$

c.  $x^2 + y^2 - 5xy - 2x + 6y - 19 = 0$

d.  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 19 = 0$

e.  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 19 = 0$

الحل:

a. لا تمثل معادلة دائرة لأنها معادلة من الدرجة الثالثة

b. لا تمثل معادلة الدائرة لأن معامل  $x^2 \neq$  معامل  $y^2$

c. لا تمثل معادلة الدائرة لأنها تحتوي على الحد  $xy$ .



لا تمثل معادلة الدائرة حيث

$$h = -(-2)/2 = 1, \quad k = -6/2 = -3, \quad C = 19$$
$$\therefore r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{1 + 9 - 19} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$$

لا تمثل معادلة الدائرة .

تمثل معادلة دائرة حيث:

$$h = 1, \quad k = -3, \quad c = -19$$
$$\therefore r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{1 + 9 + 19} = \sqrt{29} > 0$$

## مثال 2

جد إحداثيات مركز ونصف قطر الدائرة  $2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 6 = 0$

الحل :

نجعل معامل  $x^2 =$  معامل  $y^2 = 1$

$$\therefore [2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 6 = 0] \div 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$$

$$\therefore C (-A/2, -B/2) = C (-6/2, 4/2)$$

$$\therefore C (-3, 2) \text{ المركز}$$

$$\therefore r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 - 3} = \sqrt{9 + 4 - 3} = \sqrt{10}$$

$$\therefore r = \sqrt{10} \text{ units}$$

## مثال 3

أكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها  $C (1, -3)$  ,  $r = 2$  وحدات

الحل :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

تبسيط المعادلة

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 4$$

المعادلة العامة :

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

#### مثال 4

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين  $p_1(1, -2)$  ,  $p_2(4, -3)$  ويقع مركزها على محور

الصادات .

الحل :

بما ان الدائرة يقع مركزها على محور الصادات

$$\therefore C(0, k)$$

$$\therefore r = p_1 C = \sqrt{(0-1)^2 + (k+2)^2} = \sqrt{1 + (k+2)^2}$$

$$r = p_2 C = \sqrt{(0-4)^2 + (k+3)^2} = \sqrt{16 + (k+3)^2}$$

$$\therefore \sqrt{1 + (k+2)^2} = \sqrt{16 + (k+3)^2} \quad \text{وبتريغ الطرفين}$$

$$1 + (k+2)^2 = 16 + (k+3)^2 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\therefore 1 + k^2 + 4k + 4 = 16 + k^2 + 6k + 9$$

$$\Rightarrow 2k = -20 \Rightarrow k = -20/2 = -10$$

$$\therefore C(0, -10)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1 + (-10+2)^2} = \sqrt{65} \quad \text{units}$$

$$\therefore x^2 + (y+10)^2 = 65$$

#### مثال 5

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط  $p_1(0, 0)$  ,  $p_2(2, 0)$  ,  $p_3(3, -1)$

الحل :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0 \quad \text{معادلة الدائرة العامة} \quad (1) \dots\dots\dots$$

$$p_1(0, 0) \quad \text{تحقق المعادلة (1)}$$

$$\Rightarrow 0^2 + 0^2 + A(0) + B(0) + c = 0$$

$$\Rightarrow c = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$p_2(2, 0) \quad \text{تحقق المعادلة (1)}$$

$$\Rightarrow 4 + (0)^2 + 2A + B(0) + 0 = 0 \quad \text{من معادلة (2) } (c = 0)$$

$$\Rightarrow 2A = -4 \Rightarrow A = -2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$p_3(3, -1) \quad \text{تحقق المعادلة (1)}$$

$$\Rightarrow 3^2 + (-1)^2 + 3A + B(-1) + c = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{نعوض } c = 0, A = -2 \text{ في معادلة (4)}$$

$$\Rightarrow 10 + 3(-2) - B + 0 = 0$$

$$\Rightarrow 10 - 6 - B = 0 \Rightarrow 4 - B = 0 \Rightarrow B = 4$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad \text{المعادلة}$$



## مثال 6

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين  $p_1 (2, 1)$  ,  $p_2 (-1, 1)$  ويقع مركزها على المستقيم الذي معادلته  $2x - 4y - 5 = 0$

الحل :

المعادلة العامة للدائرة  $x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0$

تحقق المعادلة العامة  $p_1 (2, 1)$

$$\Rightarrow 4 + 1 + 2A + B + c = 0$$

$$\Rightarrow 5 + 2A + B + c = 0 \quad \dots\dots(1)$$

تحقق المعادلة العامة  $p_2 (-1, 1)$

$$\Rightarrow 2 - A + B + C = 0 \quad \dots\dots(2)$$

$$\Rightarrow 5 + 2A + B + C = 0 \quad \text{من معادلة (1) و (2)}$$

$$\mp 2 \pm A \mp B \mp C = 0$$

بالطرح

$$\underline{3 + 3A = 0}$$

$$\Rightarrow 3A = -3 \Rightarrow A = -3/3 \Rightarrow A = -1 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$\therefore C (-A/2, -B/2)$  مركز الدائرة

مركز الدائرة يحقق معادلة المستقيم  $2x - 4y - 5 = 0$

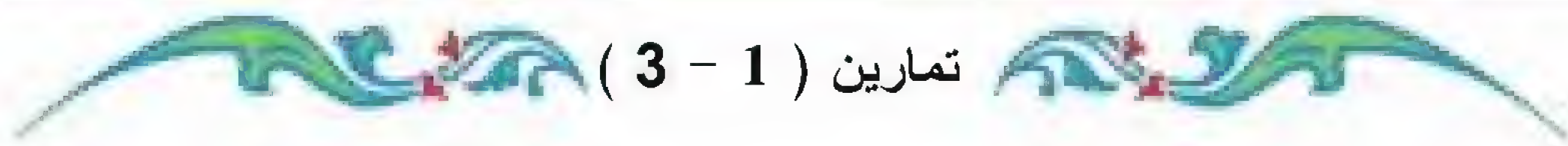
$$\Rightarrow -A + 2B - 5 = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\Rightarrow 1 + 2B - 5 = 0 \Rightarrow 2B = 4 \Rightarrow B = 2 \quad \text{نعوض (3) في (4) نحصل على}$$

$\therefore A = -1, B = 2$  نعوض في معادلة (1)

$$\Rightarrow 5 + 2(-1) + 2 + c = 0 \Rightarrow 5 - 2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -5$$

$$x^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0 \quad \text{المعادلة}$$



1 بين أي من المعادلات الآتية تمثل معادلة دائرة .

a.  $x^2 + 3y^2 - 2x + 3y = 0$

b.  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$

c.  $x^2 + y^2 + 2xy = 1$

d.  $x^2 + y^2 = 0$

e.  $y = -2x$

2 جد معادلة الدائرة في كل حالة من الحالات الآتية :

مركزها  $c(3, -2)$  ونصف قطرها 5 وحدات

مركزها نقطة الاصل وتمر بالنقطة  $p(-4, 3)$

مركزها  $c(-1, 5)$  وتمر بالنقطة  $p(4, 3)$

3 جد معادلة الدائرة التي نهايتي قطر فيها  $p_1(2, -3)$ ,  $p_2(4, 1)$  بثلاثة طرق مختلفة .

4 جد أحداثيات المركز ونصف قطر الدوائر الآتية : -

a.  $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$

b.  $(x-2)^2 + y^2 = 9$

c.  $2x^2 + 2y^2 + 3x + 4y = 0$

5 جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم  $y=4$  ومركزها  $c(-2, -3)$

6 جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين وتمس المستقيم  $y=6$

7 جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة  $(6, -3)$  وتمس المحورين الاحداثيين

8 جد معادلة الدائرة التي نصف قطرها 5 وحدات و تمس المحورين الاحداثيين والواقعة :-

أولاً : في الربع الثاني

ثانياً : في الربع الرابع

ثالثاً : في الربع الاول

9 اكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها  $c(2, -3)$  ونصف قطرها 4 وحدات .

10 جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين  $p_1(3, -1)$ ,  $p_2(5, 1)$  ويقع مركزها على محور السينات

11 جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط  $p_1(1, 0)$ ,  $p_2(0, 1)$ ,  $p_3(3, 4)$  .



الدوال الدائرية Circular Functions

- [4-1] نبذة تاريخية .
- [4-2] التطبيق اللاف .
- [4-3] دالة الظل .
- [4-4] دوال دائرية اخرى .
- [4-4-1] تعريف .
- [4-4-2] تعريف .
- [4-4-3] تعريف .
- [4-5] العلاقات بين الدوال الدائرية .
- [4-6] استخدام الحاسبة .
- [4-7] الزوايا المنتسبة .
- [4-8] قيم الدوال الدائرية للزاوية التي قياسها  $(-\theta)$  .
- [4-9] الدوال الدائرية لمجموع أو فرق قياسي زاويتين .
- [4-10] المعادلات المثلثية .
- [4-11] رسم منحنيات الدوال المثلثية .

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الزاوية المنتسبة	$(n \times 90^\circ \pm \theta)$
قانون الجيب تمام	$A'^2 = B'^2 + C'^2 - 2B' C' \cos A$
قانون الجيب	$\frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B} = \frac{C'}{\sin C}$
المحور السيني	x-axis , $\overleftrightarrow{xx'}$
المحور الصادي	y-axis , $\overleftrightarrow{yy'}$

## الفصل الرابع

### الدوال الدائرية Circular Functions

#### [1-4] نبذة تاريخية :

عرف هذا العلم عند العرب بعلم الانساب وذلك لاستفادة من الأوجه المختلفة الناشئة من النسبة بين اطوال اضلاع المثلث ، واليهم يعود الفضل في جعله علماً منظماً له قوانينه الخاصة ومستقلاً عن الفلك الذي اعتبره اليونانيون علماً مساعداً لاعمالهم الفلكية .

وقد اضاف العرب اضافات هامة ودرسوا هذا العلم دراسة ممتازة عن الامم التي سبقتهم وبذلك اعتبر هذا العلم عربياً .

استعمل العرب النسبة المثلثية بدلاً من الاصطلاح ( وتر ضعف القوس ) الذي إستعمله اليونانيون وبذلك سهلوا الأعمال الرياضية وهم أول من أدخل ( المماس - الظل ) في اعداد النسب المثلثية ، وكذلك ظل التمام .

ان العالم العربي ( أبو الوفاء البوزجاني ) في القرن العاشر الميلادي هو الذي أدخل هذا الاصطلاح على أنه مأخوذ من ظلال الاجسام التي تتكون نتيجة سير الاشعة الضوئية المنبعثة من الشمس في خطوط مستقيمة .

وقد توصل العرب الى استخراج القواعد المتعلقة بالمثلثات الكروية القائمة وحل المسائل المتعلقة بالمثلثات الكروية المائلة وكذلك مساحات المثلثات الكروية ، واوجدوا الجداول الرياضية للجيب والظل والقاطع التمام واستعملوا طرقاً متنوعة لحساب هذه الجداول ، ووضعوا معادلات واشكالا لحل المشكلات التي صادفتهم .

وألف جابر بن الأفلاح المتوفي في قرطبة في منتصف القرن الثاني عشر للميلاد موسوعة من كتب في الفلك أولها في علم المثلثات الكروية .

ويعتبر البتاني ( أبو عبد الله بن جابر بن سنان ) المتوفي سنة 929 م من العلماء الذين ساعدوا على أن يصبح المثلثات علماً مستقلاً كذلك نبغ ( ابن يونس المصري ( 1009 م )) في علم المثلثات وتوصل الى المتطابقة :

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin (x+y) + \frac{1}{2} \sin (x-y)$$

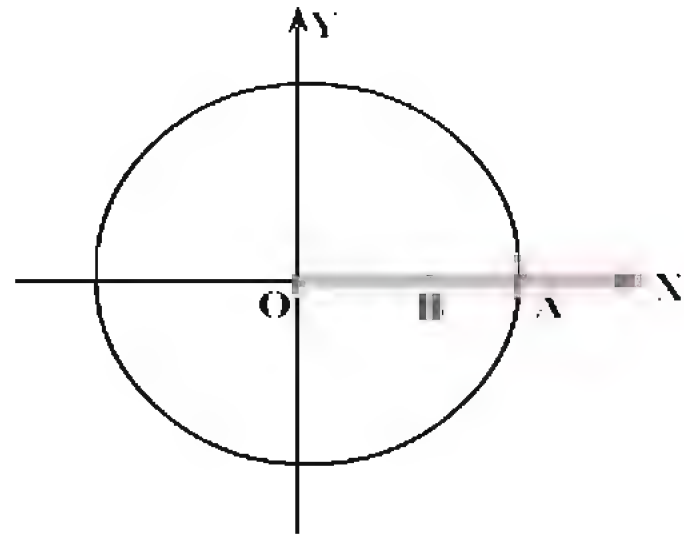


## [4-2] التطبيق الالف The winding mapping

ان التطبيق الذي يقرن اي عدد حقيقي بنقطة من دائرة الوحدة (Unit Circle) (أو بزاوية موجهة بالوضع القياسي) يسمى التطبيق الالف .

وكما سبق أن تعلمت في الصف الرابع العلمي انه لو كانت لدينا زاوية موجهة في وضع قياسي مرسومة في دائرة الوحدة فأن لهذه الزاوية نقطة مثلثية واحدة وواحدة فقط .

ففي الشكل (4-1) النقطة المثلثية للزاوية  $\overrightarrow{AOB}$  هي A وهي تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة



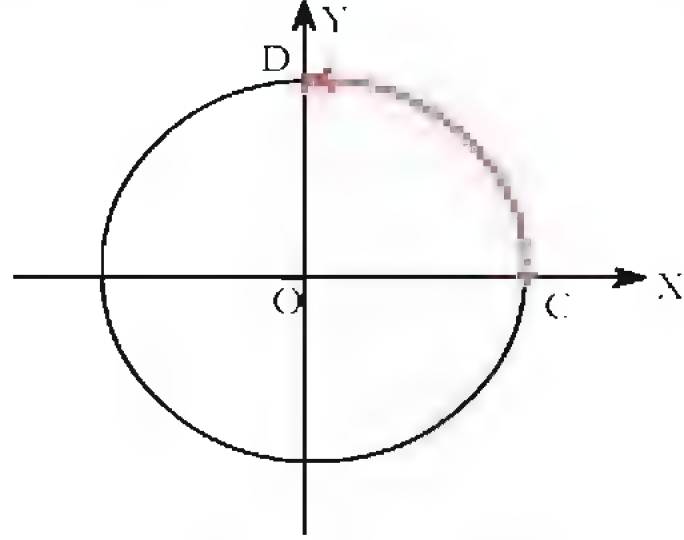
$\therefore A$  تقع على الجزء الموجب من محور السينات

$r = OA$  ,  $r = 1$  (حيث  $r$  نصف قطر دائرة الوحدة)

$$\therefore A = (1, 0)$$

الشكل (4-1)

وفي الشكل (4-2) النقطة المثلثية للزاوية  $\overrightarrow{COD}$  هي D وهي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة

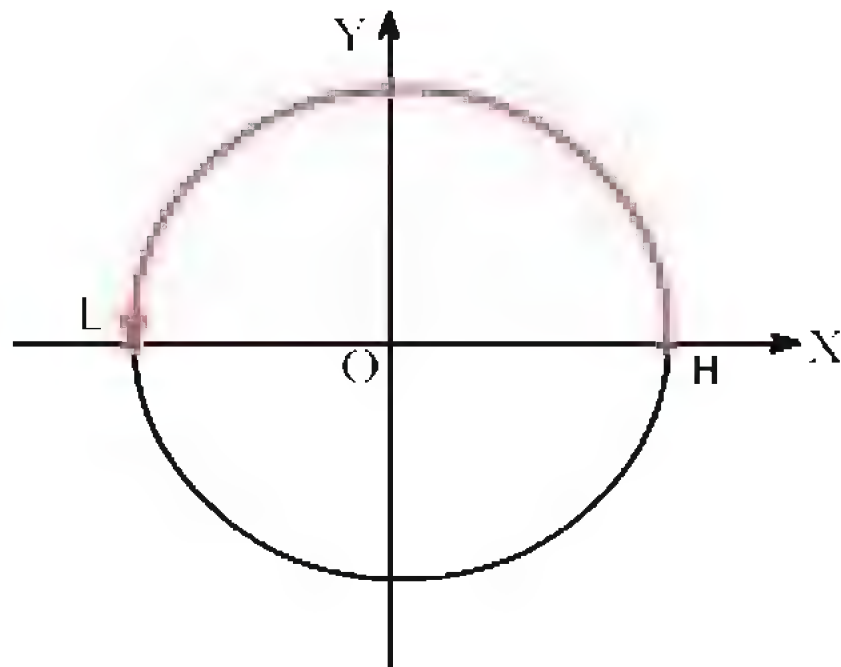


$\therefore D$  تقع على الجزء الموجب من محور الصادات

$$\therefore D = (0, 1)$$

الشكل (4-2)

وفي الشكل (4-3) النقطة المثلثية للزاوية  $\overrightarrow{HOL}$  هي L وهي تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة

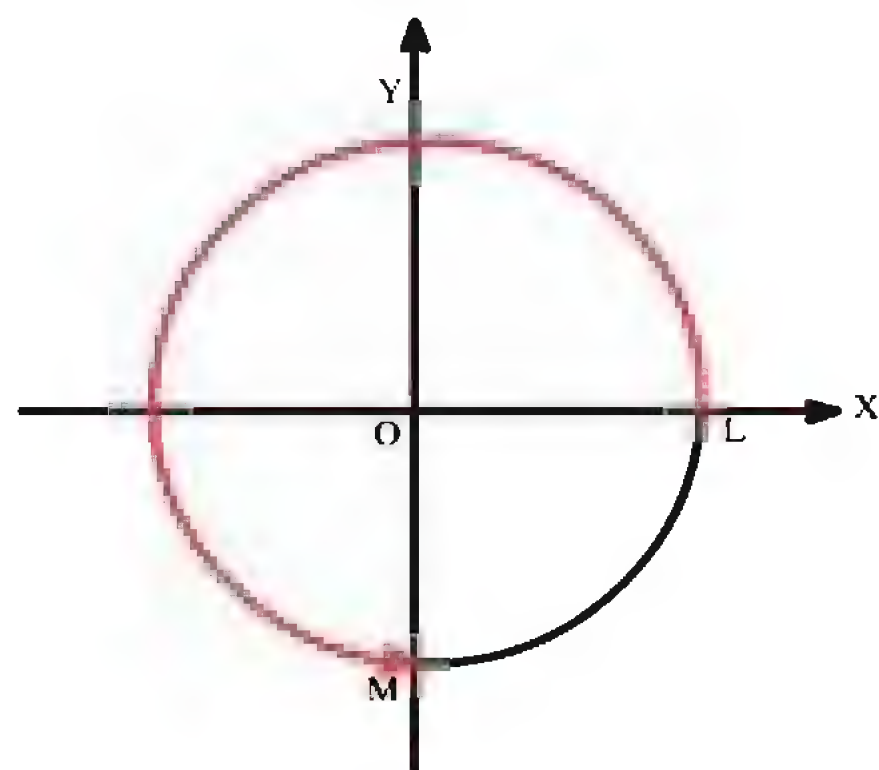


$\therefore L$  تقع على الجزء السالب من محور السينات

$$\therefore L = (-1, 0)$$

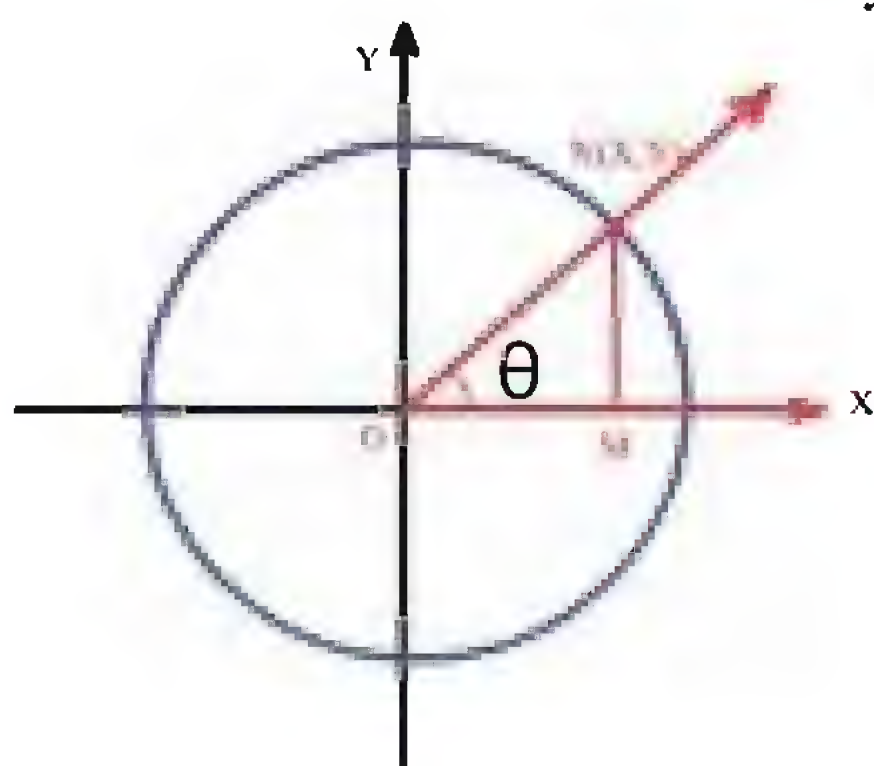
الشكل (4-3)

وبالمثل في الشكل (4-4) النقطة المثلثية للزاوية  $\overrightarrow{LOM}$  هي  $M = (0, -1)$   $\therefore$



الشكل (4-4)

وفي الشكل (4-5) النقطة المثلثية للزاوية  $\overrightarrow{MON}$  هي N حيث  $N = (x, y)$   $\therefore$



الشكل (4-5)

فإذا كانت  $\theta$  عدداً حقيقياً ، وكانت  $N = (x, y)$  النقطة الواقعة على دائرة الوحدة الموافقة للعدد  $\theta$  فإن العدد  $x$  هو  $\cos \theta$  ويرمز له  $\cos \theta$  حيث  $\theta$  قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي الذي يمر ضلعها النهائي من  $N$  أما العدد  $y$  هو  $\sin \theta$  ويرمز له  $\sin \theta$  حيث  $\theta$  قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي الذي يمر ضلعها النهائي من  $N$

و بهذا نكون قد عرفنا دالتين مجال كل منهما  $R$  ( مجموعة الاعداد الحقيقية ) و المجال المقابل لكل منهما  $[-1, 1]$  وذلك لانه مهما يكن  $\theta \in R$  فإن

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\text{و } -1 \leq \sin \theta \leq 1$$



الجيب (sine) دالة مجالها  $R$  ومجالها المقابل  $[-1,1]$  بحيث :

$$\forall \theta \in R : \sin \theta = y$$

حيث  $y$  الاحداثي الصادي للنقطة المثلثية .

جيب تمام (cosine) دالة مجالها  $R$  ومجالها المقابل  $[-1,1]$  بحيث :

$$\forall \theta \in R : \cos \theta = x$$

حيث  $x$  الاحداثي السيني للنقطة المثلثية .

### القياس الرئيس للزاوية :

ان اي زاوية موجهة بالوضع القياسي تقترن بمجموعة غير منتهية من الاعداد يدعى كل منها قياساً لهذه الزاوية . وقد جرت العادة على اعتبار القياس الدائري الذي يحقق العلاقة :

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

أو القياس الستيني الذي يحقق العلاقة :

$$0 \leq \theta < 360^\circ$$

وهو القياس الرئيس للزاوية.

واضح أن هذا القياس وحيد ، وأن بقية القياسات تنتج باضافة  $(2k\pi)$  حيث  $(k)$  عدد صحيح ، الى

$$\text{القياس الرئيس } \theta \text{ حيث } \boxed{\text{Angle} = 2k\pi + \theta}$$

### مثال 1

اوجد القياس الرئيس لكل من الزوايا الآتية :

a)  $8.75\pi$

b) 66

الحل :

a)  $8.75\pi = 8\pi + 0.75\pi$

$0.75\pi = \frac{3}{4}\pi$  لكن

∴ القياس الرئيس للزاوية التي قياسها  $(8.75\pi)$  هو  $(\frac{3}{4}\pi)$

$$\begin{aligned} \text{b) } 66 &= 66 \times \frac{7}{22} \Pi \\ &= 21 \Pi \\ &= 20 \Pi + \Pi \end{aligned}$$

∴ القياس الرئيس للزاوية هو  $\Pi \simeq 3.14$

مثال 2

احسب  $\sin(-7\Pi/2)$

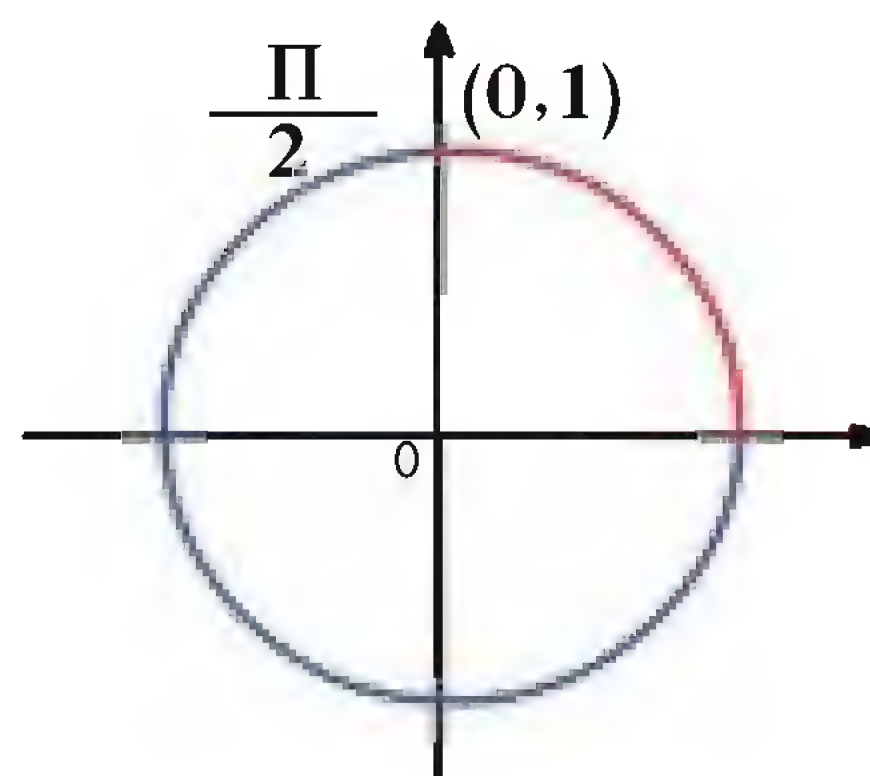
الحل :

$$-7 \Pi / 2 = -4 \Pi + \Pi / 2$$

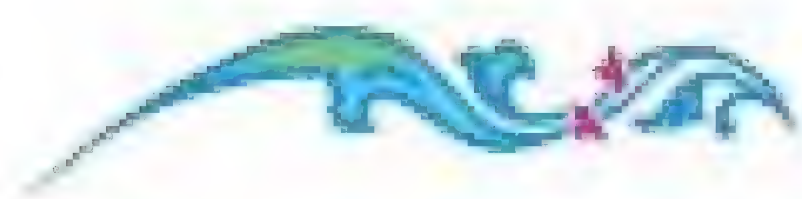
∴ القياس الرئيس للزاوية  $-7\Pi / 2$  هو  $\Pi/2$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(-7\Pi/2) &= \sin \Pi/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

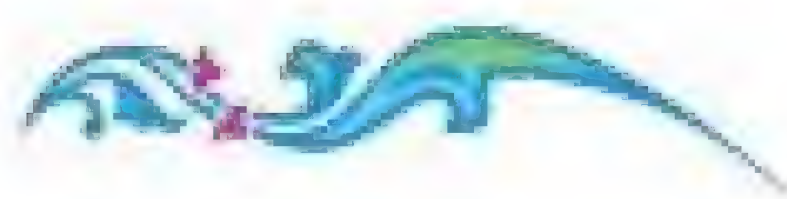
(الاحداثي الصادي للنقطة المثلثية (0,1))



الشكل (4-6)



تمارين (4-1)



1. جد القياسات الرئيسة لكل من الزاوي التي قياساتها الآتية :

a.  $21 \Pi$       b.  $\frac{-15}{2} \Pi$

2. جد الاعداد الحقيقية الآتية :

a.  $\sin \Pi / 3$

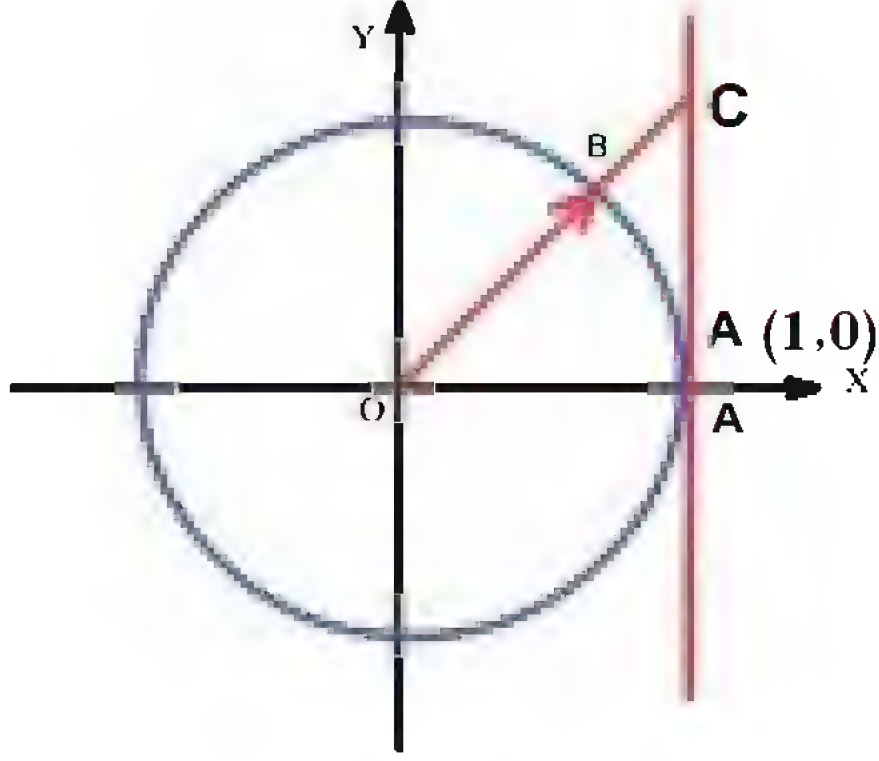
b.  $\cos 19 \Pi / 6$

c.  $\cos 24\Pi$



### [4-3] دالة الظل ( tangent ) :

يمكن أن نحصل على هذه الدالة من دائرة الوحدة ، وذلك لو وضعنا مستقيماً مدرجاً على جميع الاعداد الحقيقية بحيث يكون مماساً للدائرة عند  $A (1,0)$



الشكل (4-7)

( لاحظ الشكل (4-7) وبشرط أن يكون العدد صفر منطبقاً على A فان نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية  $\theta$  مع هذا الخط يمثل  $\tan \theta$  .

تعريف

دالة الظل :  $\tan$

$$\tan : \{ \theta : \theta \in \mathbb{R} , \cos \theta \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{R} ,$$

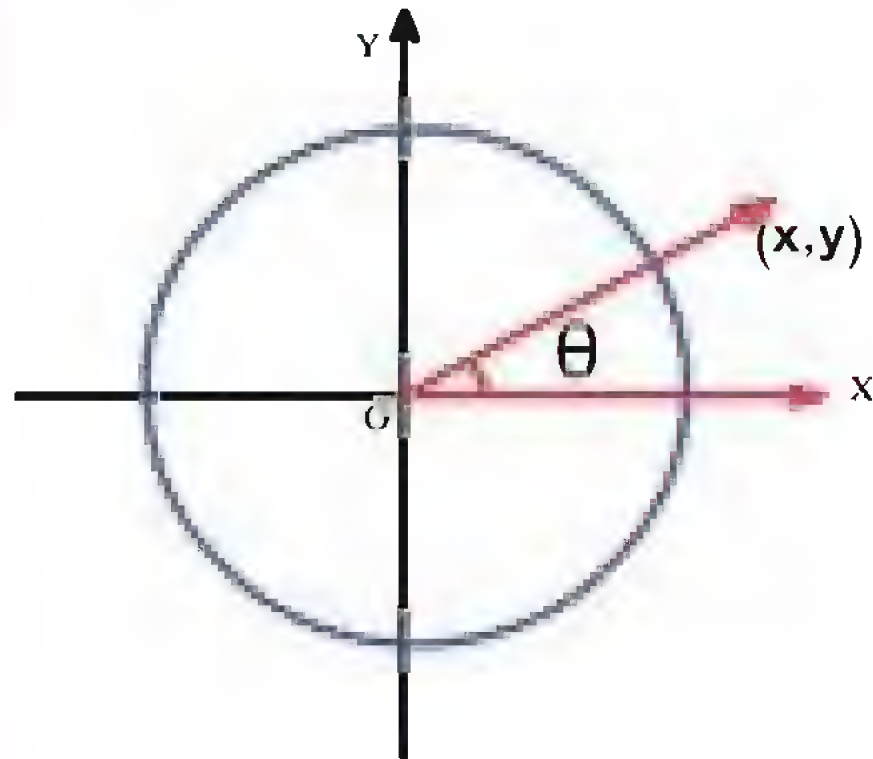
$$\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$$

نلاحظ ان دالة الظل ( $\tan$ ) هي الدالة الناتجة من  $\sin \theta / \cos \theta$

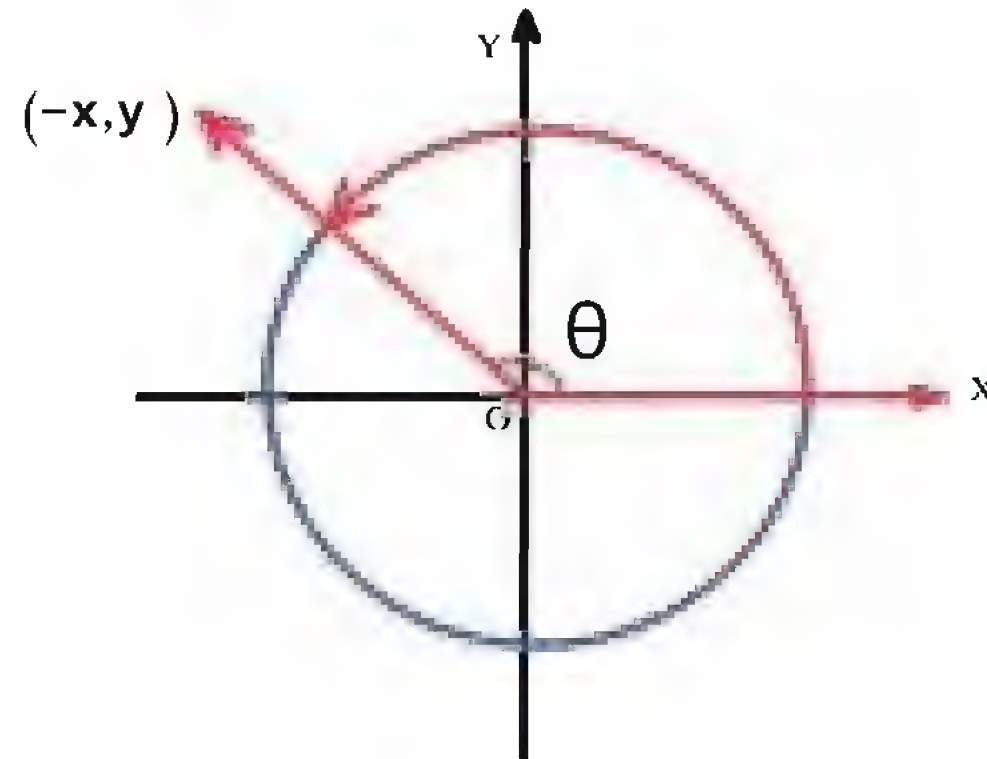
ملاحظات :

1.  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  فان الزاوية  $\theta$  تقع في الربع الاول وتكون النقطة المثلثية  $(x,y)$  ، اي  $\cos \theta > 0 , \sin \theta > 0$  لاحظ الشكل (5-8)
2. اذا كانت  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  فان الزاوية  $\theta$  تقع في الربع الثاني وتكون النقطة المثلثية  $(-x,y)$  اي ان  $\cos \theta < 0 , \sin \theta > 0$

لاحظ الشكل (4-9)



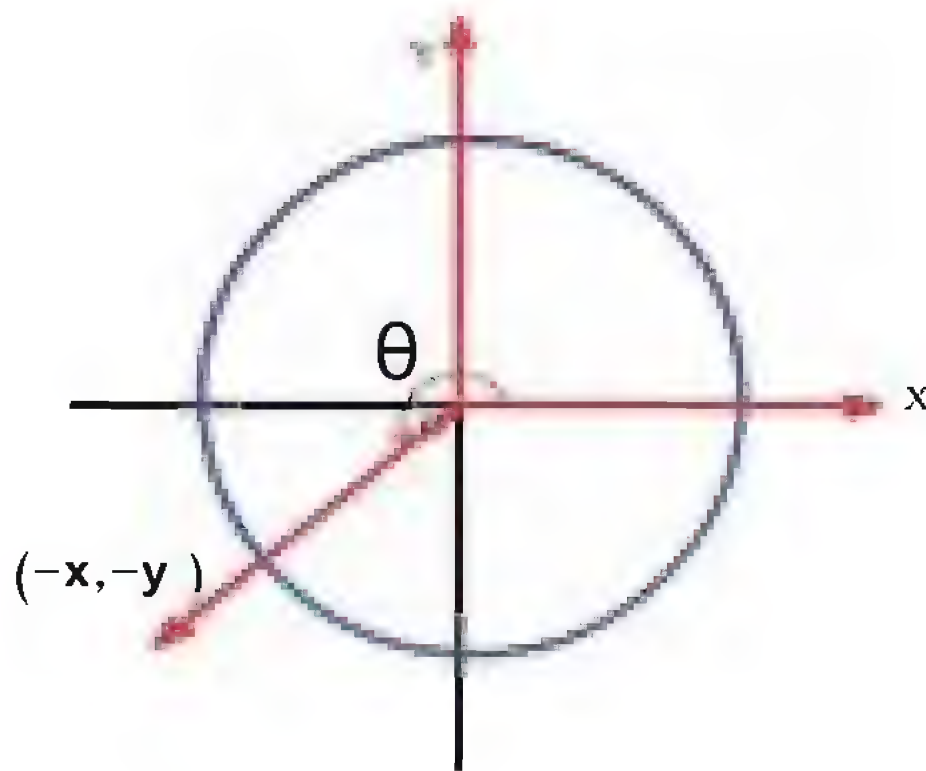
الشكل (4-8)



الشكل (4-9)

3. إذا كانت  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$  فإن الزاوية  $\theta$  تقع في الربع الثالث وتكون النقطة المثلثية للزاوية  $\theta$  هي  $(-x, -y)$  وبهذا يكون :  
 $\sin \theta < 0$  ,  $\cos \theta < 0$  بالتالي فإن  $\tan \theta > 0$

كما في الشكل (4-10)



الشكل (4-10)

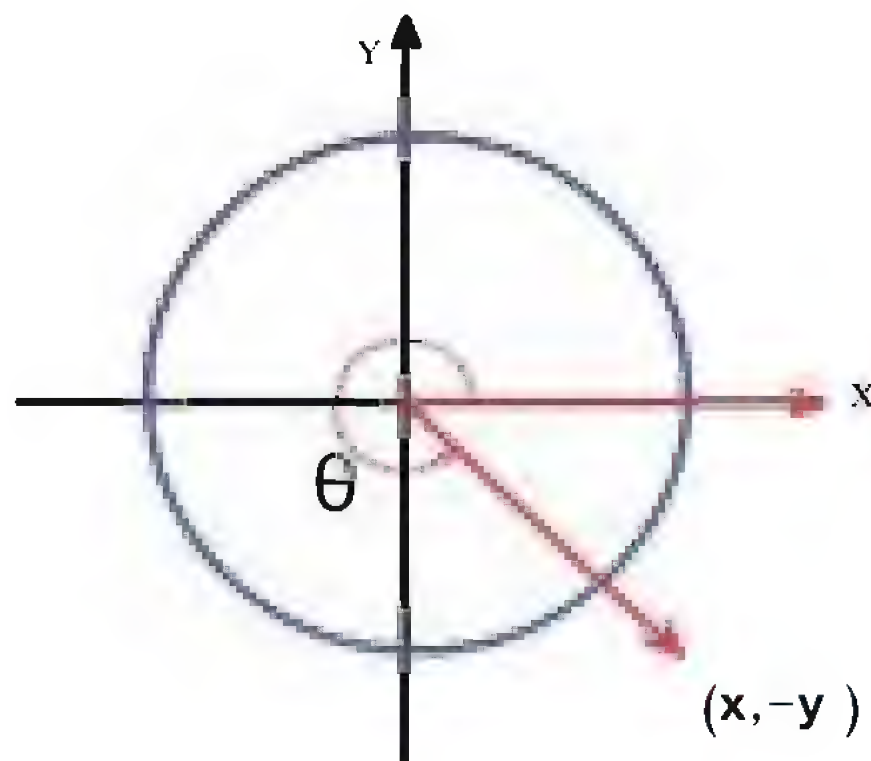
4. إذا كانت  $2\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  فإن الزاوية  $\theta$  تقع في الربع الرابع وتكون النقطة المثلثية للزاوية هي  $(x, -y)$  وبهذا يكون :  
 $\sin \theta < 0$  ,  $\cos \theta > 0$  وبالتالي فإن  $\tan \theta < 0$

كما في الشكل (4-11)

ويمكن وضع ماتقدم في الجدول الآتي :

الربع	sin	cos	tan
1	+	+	+
2	+	-	-
3	-	-	+
4	-	+	-

جدول اشارات الدوال المثلثية في الارباع



الشكل (4-11)



لتكن c دائرة الوحدة في الشكل (4-12)

B هي النقطة المثلثية للزاوية  $\theta$  احداثياً B هي :  $(\cos \theta, \sin \theta)$

نلاحظ أن  $r = OB = 1$

$$BM = \sin \theta$$

$$OM = \cos \theta$$

وبما ان المثلث OMB قائم الزاوية في M

حسب مبرهنة فيثاغورس نستنتج ان :

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

**ملاحظة :** نكتب عادة  $\sin^2 \theta$  بدلاً من  $[\sin \theta]^2$

وكذلك  $\cos^2 \theta$  بدلاً من  $[\cos \theta]^2$

وبالمثل نكتب  $\sin^3 \theta$  بدلاً من  $[\sin \theta]^3$  وهكذا

اي ان القاعدة السابقة يمكن ان تكتب :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

مثال 3

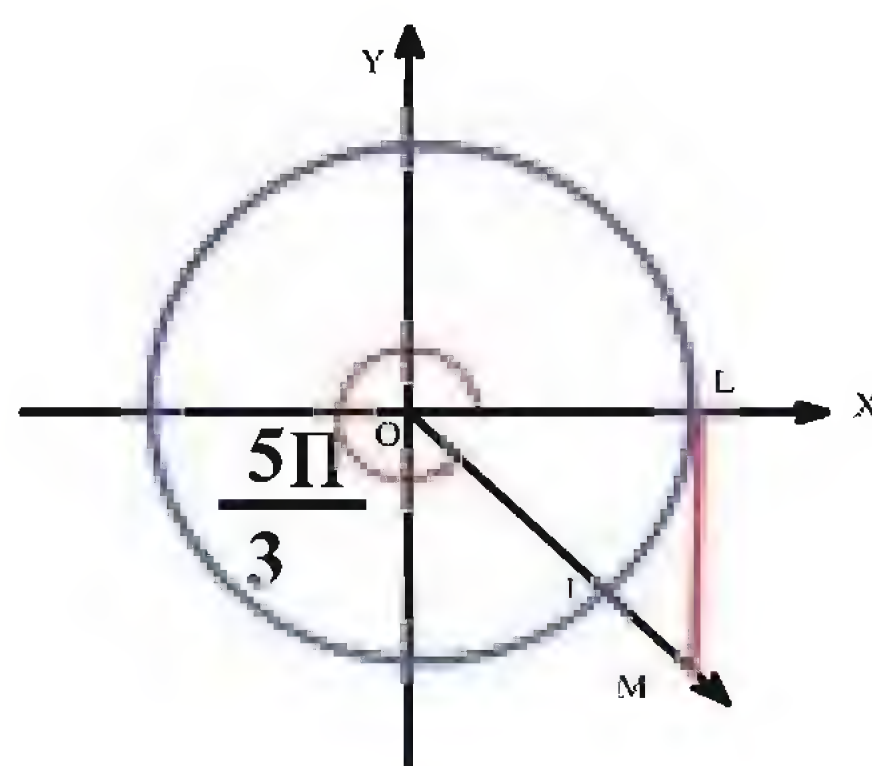
جد  $\tan 5\pi/3$

**الحل :** الزاوية  $\theta = 5\pi/3$  تنتهي في الربع الرابع فنجد من المثلث OML أن :

$$\tan \frac{5\pi}{3} = \frac{\sin \frac{5\pi}{3}}{\cos \frac{5\pi}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{3} \approx -1.732$$



$$\left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

#### مثال 4

إذا كانت  $\theta$  هو قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي وكان  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  فاوجد قيمة  $\cos \theta$  ,  $\tan \theta$  علماً أن ضلع الزاوية النهائي التي قياسها  $\theta$  يقع في الربع الثاني .

الحل :

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$9/25 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 \theta = 1 - 9/25$$

$$= 16 / 25$$

$$\therefore \cos \theta = \pm 4/5$$

وبما أن  $\theta$  تقع في الربع الثاني

$$\therefore \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta = -4/5$$

$$\therefore \tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -3/4$$



## تمارين (4-2)

1. اوجد  $\sin x$  ,  $\cos x$  ,  $\tan x$  اذا علمت ان الضلع النهائي للزاوية (x) الموجهة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقط المثلثية الآتية :

a.  $\left( \frac{1}{\sqrt{5}} , -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$

b.  $\left( -\frac{\sqrt{3}}{3} , \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$

c.  $\left( \frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

d.  $(-0.6 , -0.8)$

2. جد ما يأتي :

a.  $\sin(30\Pi)$

b.  $\cos(-13\Pi/6)$

c.  $\tan(4\Pi/3)$

d.  $\cos(30\Pi)$

3. جد قيمة ما يأتي :

a.  $\sin^2 3 + \cos^2 3$

b.  $\cos^2 \Pi/6 - \sin^2 \Pi/6$

4. تحقق مما يأتي :

a.  $\sin \frac{\Pi}{6} \cos \frac{\Pi}{3} + \cos \frac{\Pi}{6} \sin \frac{\Pi}{3} = \sin \frac{\Pi}{2}$

#### [4-4] دوال دائرية أخرى :

عرفنا في البنود السابقة الدوال الدائرية :  $\sin$  ,  $\cos$  ,  $\tan$

وباستخدام هذه الدوال يمكننا ان نعرف دوال أخرى وذلك كما يأتي :

1. **الدالة cotangent** ( ظل تمام ) ويرمز لها  $\cot$  وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة ( الظل )  $\tan$ .

$$\cot x = 1 / \tan x \quad \text{اي ان :}$$

$$= \cos x / \sin x$$

#### تعريف [4-4-1]

دالة ظل تمام  $\cot$

$$\cot : \{ \theta : \theta \in \mathbb{R} , \sin \theta \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{R} ,$$

$$\cot \theta = \cos \theta / \sin \theta$$

اي ان الدالة  $\cot$  تعرف لكل الاعداد الحقيقية بشرط  $(\sin \theta \neq 0)$ .

2. **الدالة secant** (قاطع) ويرمز لها  $\sec$  وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة  $(\cos)$

$$\sec x = 1 / \cos x \quad \text{اي ان}$$

وهي تعرف لكل الاعداد الحقيقية  $x$  بشرط  $(\cos x \neq 0)$  بعبارة أخرى

#### تعريف [4-4-2]

دالة القاطع  $\sec$  :

$$\sec: \{ \theta: \theta \in \mathbb{R} , \cos \theta \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{R} ,$$

$$\sec \theta = 1 / \cos \theta$$



3. الدالة cosecant (القاطع التمام) ويرمز لها csc وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة (sin)

$$\text{csc } x = 1/\sin x \quad \text{اي ان}$$

وهي تعرف لكل الاعداد الحقيقية  $x$  بشرط  $(\sin x \neq 0)$

تعريف [3-4-4]

دالة قاطع التمام : csc

$$\text{csc}: \{ \theta : \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta \neq 0 \} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\text{csc } \theta = 1/\sin \theta$$

مثال 5

اذا كان :  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  وكان  $\sin x = 5/13$  فجد كلاً من :

$\cos x$  ,  $\tan x$  ,  $\cot x$  ,  $\sec x$  ,  $\csc x$

الحل :

$$\therefore \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\therefore (5/13)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x = 1 - 25/169$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 144/169$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm 12/13$$

وبما ان  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  اي انها تقع في الربع الثاني

$$\therefore \cos x < 0$$

$$\therefore \cos x = -12/13$$

$$\therefore \tan x = \sin x / \cos x$$

$$\therefore \tan x = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{-12}{13}}$$

$$\therefore \tan x = -5/12$$

$$\therefore \cot x = -12/5$$

$$\sec x = 1/\cos x = -13/12$$

$$\csc x = 1/\sin x = 13/5$$

## [4-5] العلاقات بين الدوال الدائرية :

مبرهنة [4-5-1]

( المتطابقة الفيثاغورية )

$$1 \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2 \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad \forall x, x \neq (2n+1) \cdot \pi / 2$$

حيث n اي عدد صحيح

$$3 \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \quad \forall x, x \neq n\pi$$

حيث n اي عدد صحيح

1 لقد سبق برهنتها في البنود السابقة .

2 اذا كان x اي عدد حقيقي ما عدا المضاعفات الفردية لـ  $(\pi/2)$  والتي تجعل

$(\cos x \neq 0)$  فأنا نقسم طرفي المتطابقة (1) على  $\cos^2 x$  لنحصل على :

$$\begin{aligned} & (\sin x / \cos x)^2 + (\cos x / \cos x)^2 = (1 / \cos x)^2 \Rightarrow \\ & \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad \forall x, x \neq (2n+1)\pi/2 \end{aligned}$$

حيث n عدد صحيح

$$\tan x = \sin x / \cos x$$

وذلك لان :

$$1/\cos x = \sec x$$

3 وبالطريقة السابقة نفسها اذا كان  $x \neq n\pi$  حيث n عدد صحيح ، يمكن قسمة طرفي المتطابقة

(1) على  $\sin^2 x$  فنحصل على :

$$\begin{aligned} & (\sin x / \sin x)^2 + (\cos x / \sin x)^2 = (1 / \sin x)^2 \Rightarrow \\ & 1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \quad \forall x, x \neq n\pi \end{aligned}$$



حيث  $n$  عدد صحيح

وذلك لان :

$$\frac{1}{\sin x} = \csc x, \quad \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

اثبت صحة المتطابقة الآتية :

مثال 6

$$\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \csc^2 x, \quad \forall x, x \neq n\pi/2$$

حيث  $n$  عدد صحيح

الاثبات : الطرف الايسر

$$\sec^2 x + \csc^2 x = 1/\cos^2 x + 1/\sin^2 x$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

$$= 1 / \cos^2 x \sin^2 x$$

$$= 1 / \cos^2 x \cdot 1/\sin^2 x$$

$$= \sec^2 x \csc^2 x$$

$$= \text{الطرف الايمن}$$

اثبت صحة المتطابقة الآتية :

مثال 7

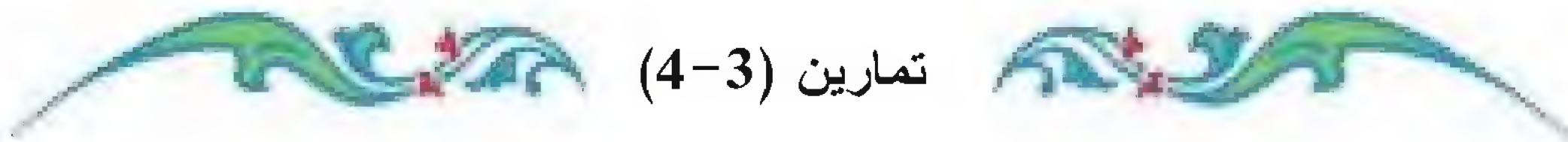
$$\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} = 4 \cot^2 x$$

الاثبات : الطرف الايسر

$$\frac{3 \cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{3 \cos^2 x + (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{3 \cos^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{4 \cos^2 x}{\sin^2 x} = 4 \cot^2 x \quad \text{الطرف الايمن}$$



تمارين (4-3)

1. إذا كان  $3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$  وكان  $\cos x = 2/3$  فجد قيمة كل من :  
 $\csc x$  ,  $\sec x$  ,  $\cot x$

2. إذا كان  $\pi < x < 3\frac{\pi}{2}$  وكان  $\tan x = 7/3$  فجد قيمة كل من :  
 $\csc x$  ,  $\sec x$  ,  $\cot x$

3. اثبت صحة المتطابقات الآتية :

a.  $\tan x = \sin x \sec x$

b.  $\sec^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$

c.  $(1 - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) = 1$

d.  $\frac{1 - \cos^2 x}{\tan x} = \sin x \cos x$

e.  $\frac{1 + \sin x - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x + \tan x$





#### Using calculators استخدام الحاسبة [4-6]

لقد سبق ان تعلمت استخدام الحاسبة لايجاد قيم الدوال  $\sin$  ,  $\cos$  ,  $\tan$  مباشرة لأية زاوية والآن نتعلم استخدام الحاسبة لايجاد قيم الدوال  $\cot$  ,  $\sec$  ,  $\csc$  مباشرة لأية زاوية . مع ملاحظة نظام الزاوية ( D E G ) درجات او ( R A D ) نصف قطري

مثال 8 جد  $\csc 51^\circ$  باستخدام الآت الحاسبة

فنجد كما مر سابقاً  $\sin 51^\circ$  اي نضغط على

المفاتيح بالترتيب التالي من اليسار الى اليمين .

5

1

$\sin$

فيظهر على الشاشة 0.7771459

وهذا يعطي  $\sin 51^\circ = 0.7771459$

ثم نضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من اليسار الى اليمين .

2ndf

1/x

فيظهر على الشاشة 1.2867597 والذي يساوي  $\csc 51^\circ$  (مقلوب  $\sin$ )

ملاحظة : هناك حاسبات موجودة عليها مفتاح INV بدلاً من 2ndf

مثال 9 جد  $\csc 35^\circ 22'$  ,  $\sec 35^\circ 22'$  ,  $\cot 35^\circ 22'$

باستخدام الحاسبة

الحل :

1 نحول الدقائق الى كسر عشري من الدرجات بالضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من اليسار

الى اليمين :

$$\boxed{2} \boxed{2} \boxed{\div} \boxed{60} =$$

فيظهر على الشاشة العدد 0.3666666

2 ثم نكمل كتابة قياس الزاوية بالضغط على المفاتيح :

$$\boxed{+} \boxed{3} \boxed{5}$$

يظهر على الشاشة العدد 35.366667

3 نجد قيمة  $\tan$  بالضغط على مفتاح  $\tan$  فيظهر على الشاشة العدد :

0.620751391



4. نجد مقلوب الدالة tan لنحصل على cot بالضغط على المفاتيح :

2nd

1/x

يظهر على الشاشة العدد

$$\therefore \cot 35^\circ 22' = 1.61095086$$

وبالاسلوب نفسه اكمل حل المثال لايجاد كل من  $\sec 35^\circ 22'$  ,  $\csc 35^\circ 22'$

#### [4-7] الزاوية المنتسبة

تعريف

إذا كان  $\theta$  قياس لزاوية حادة فأى زاوية قياسها على الصورة  $(n \times 90^\circ \pm \theta)$ ، حيث  $n$  عدد

صحيح ( غير سالب ) تسمى زاوية منتسبة للزاوية الحادة التي قياسها  $\theta$

**مثال :** الزاوية التي قياسها  $(150^\circ)$  منتسبة للزاوية الحادة  $(30^\circ)$  لأن :

$$(150^\circ) = (2 \times 90^\circ - 30^\circ)$$

والزاوية  $240^\circ$  منتسبة للزاوية  $60^\circ$  لأن :

$$(240^\circ) = (2 \times 90^\circ + 60^\circ)$$

والزاوية  $300^\circ$  منتسبة للزاوية  $60^\circ$  لأن :

$$(300^\circ) = (4 \times 90^\circ - 60^\circ)$$

والزاوية  $-30^\circ$  هي زاوية منتسبة للزاوية  $30^\circ$  لأن :

$$(-30^\circ) = (0 \times 90^\circ - 30^\circ)$$

واستناداً الى التعريف السابق فانه اذا كانت  $\theta$  قياس زاوية حادة فإن الزوايا التي قياساتها :

$$(180^\circ - \theta) , (180^\circ + \theta) , (360^\circ - \theta) , (360^\circ + \theta) ,$$

$$(90^\circ - \theta) , (90^\circ + \theta) , (0^\circ + \theta) , (0^\circ - \theta) ,$$

$$(270^\circ + \theta) , (270^\circ - \theta) , \text{ هي زوايا منتسبة للزاوية } \theta .$$

**ملاحظة :**

$$240^\circ = (180^\circ + 60^\circ) \quad \text{أو} \quad 240^\circ = (270^\circ - 30^\circ)$$

$$135^\circ = (180^\circ - 45^\circ) \quad \text{أو} \quad 135^\circ = (90^\circ + 45^\circ)$$

$$300^\circ = (360^\circ - 60^\circ) \quad \text{أو} \quad 300^\circ = (270^\circ + 30^\circ)$$

$$330^\circ = (360^\circ - 30^\circ) \quad \text{أو} \quad 330^\circ = (270^\circ + 60^\circ)$$

**ملاحظة :** اذا كان قياس الزاوية اكبر من  $360^\circ$  (اي اكبر من  $2\pi$ ) نبدأ بطرح  $360^\circ$  أو مضاعفاتها



(أو طرح  $2\pi$  أو مضاعفاتها إذا كانت بالقياس الدائري) ليصبح القياس رئيسياً أي يصبح قياس الزاوية ينتمي إلى  $[0, 360^\circ]$  أو ينتمي إلى  $[0, 2\pi]$ .

جد  $\cos 120^\circ$  ,  $\sin 120^\circ$  دون استخدام الآلة الحاسبة.

مثال 10

الحل:

1 ان الزاوية  $\overrightarrow{AOB}$  التي قياسها  $120^\circ$  تقع في الربع الثاني. (لاحظ الشكل 4-13)

اذ أن:  $B(x, y) = B(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$

ولكن  $B \rightarrow B'$  تحت تأثير انعكاس في المحور Y

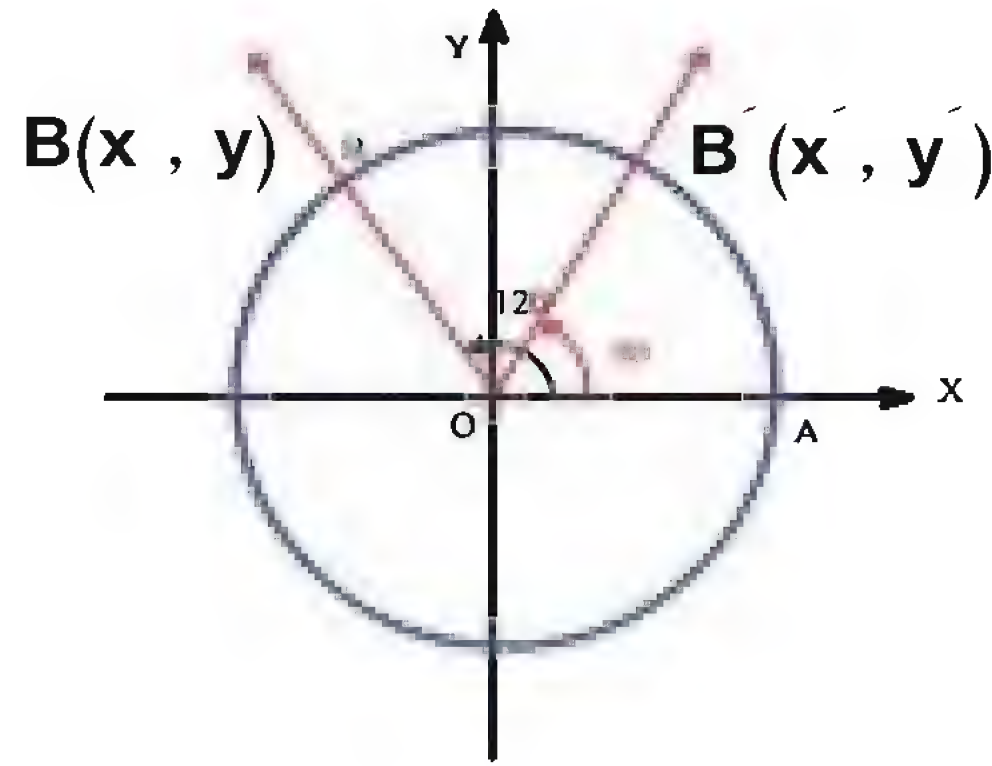
$$\therefore B'(x', y') = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$$

$$x = -x' \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$$

$$y = y' \quad \text{كذلك}$$

$$\therefore \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$



الشكل (4-13)

$$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$$

وبما أن:

$$= 2 \times 90^\circ - 60^\circ$$

$\therefore 120^\circ$  متنسبة للزاوية  $60^\circ$ .

من المثال السابق نلاحظ أن

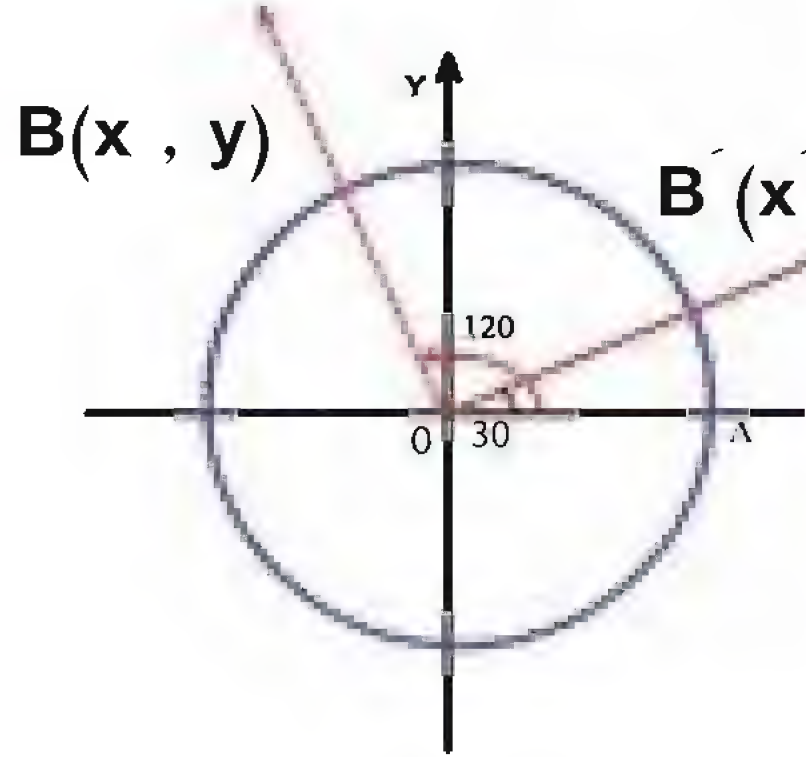
$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$$

2. ان الزاوية  $\overrightarrow{AOB}$  التي قياسها  $120^\circ$  تقع في الربع الثاني كما اسلفنا اذ إن

$$B(x, y) = B(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$$

ولكن  $B \rightarrow B'$  تحت تأثير دوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها  $90^\circ$ .



$$B'(x', y') \therefore B' = (-\sin 30^\circ, \cos 30^\circ)$$

$$B' = (\cos(90^\circ + 30^\circ), \sin(90^\circ + 30^\circ))$$

$$\therefore \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30 = -1/2$$

$$\sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

الشكل (4-14)

**نشاط 1:** باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس في نقطة الاصل (0)، أوجد

$$\sin 210^\circ, \cos 210^\circ$$

**نشاط 2:** باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس في المحور السيني اوجد

$$\sin 315^\circ, \cos 315^\circ$$

**ملاحظات:**

لايجاد قيم الدوال الدائرية لأية زاوية نتبع الآتي:

1. نجد القياس الرئيسي للزاوية اذا كان قياسها اكبر من  $360^\circ$  او اكبر من  $2\pi$

نضع قياس الزاوية الرئيسية على الصورة  $(n\pi/2 \pm \theta)$  أو  $(n \times 90^\circ \pm \theta)$

حيث n عدد صحيح موجب أي يأخذ القيم (1, 2, 3, 4, ...)  $\theta$  قياس زاوية حادة.

2. اذا كان n عدد صحيح فردي، أي يأخذ القيم: 1, 3, 5, ...

فان قيم الدالة الدائرية للزاوية  $(n\pi/2 \pm \theta)$  تتغير من:

$$\sin(n\pi/2 \pm \theta) \text{ الى } \cos$$

$$\text{ومن } \cos(n\pi/2 \pm \theta) \text{ الى } \sin \theta$$

$$\text{ومن } \tan(n\pi/2 \pm \theta) \text{ الى } \cot \theta$$

$$\text{ومن } \sec(n\pi/2 \pm \theta) \text{ الى } \csc \theta$$

$$\text{ومن } \cot(n\pi/2 \pm \theta) \text{ الى } \tan \theta$$

$$\text{ومن } \csc(n\pi/2 \pm \theta) \text{ الى } \sec \theta$$



مع مراعاة إشارة الدالة في الربع الذي تقع فيه الزاوية  $(n\pi/2 \pm \theta)$

إذا كان  $n$  عدد زوجي موجب أي تأخذ القيم:  $2, 4, 6, \dots$

فان قيم الدالة الدائرية للزاوية  $(n\pi/2 \pm \theta)$  لا تتغير وتظل كما هي

أي  $\sin(n\pi/2 \pm \theta)$  تؤول الى  $\sin \theta$  وكذلك  $\cos(n\pi/2 \pm \theta)$

تؤول الى  $\cos \theta$  ، وهكذا بقية الدوال الاخرى، مع مراعاة إشارة الدالة في الربع الذي تقع في الزاوية  $(n\pi/2 \pm \theta)$

يحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية  $\theta$  وننسبها لاحدى زاويتي هذا الربع.  
فمثلاً:

في الربع الاول: ننسب للزاوية  $\theta - 90^\circ$  الى  $\theta + 360^\circ$

وفي الربع الثاني: ننسب للزاوية  $\theta + 90^\circ$  الى  $\theta - 180^\circ$

وفي الربع الثالث: ننسب للزاوية  $\theta + 180^\circ$  الى  $\theta - 270^\circ$

وفي الربع الرابع: ننسب للزاوية  $\theta + 270^\circ$  الى  $\theta - 360^\circ$

جد قيم الدوال الدائرية للزاويا التي قياساتها:

مثال 11

$30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ, 420^\circ$

الحل:

الزاوية التي قياسها  $30^\circ$  تقع في الربع الاول

$$\therefore \sin 30^\circ = 1/2, \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2, \tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$$

$$\csc 30^\circ = 2, \sec 30^\circ = 2/\sqrt{3}, \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

الزاوية التي قياسها  $150^\circ$  تقع في الربع الثاني

$$\therefore \sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) \text{ or } = \sin 30^\circ = 1/2$$

$$\sin 150^\circ = \sin (90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2$$

$$\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$$

or

$$\cos 150^\circ = \cos (90^\circ + 60^\circ)$$

$$= -\sin 60^\circ = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 150^\circ = \tan (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\tan 30^\circ = -1/\sqrt{3}$$

or

$$\tan 150^\circ = \tan (90^\circ + 60^\circ)$$

$$= -\cot 60^\circ = -1/\sqrt{3}$$

$$\cot 150^\circ = \cot (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

or

$$\cot 150^\circ = \cot (90^\circ + 60^\circ)$$

$$= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = \sec (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\sec 30^\circ = -2/\sqrt{3}$$

or

$$\sec 150^\circ = \sec (90^\circ + 60^\circ)$$

$$= -\csc 60^\circ = -2/\sqrt{3}$$

$$\csc 150^\circ = \csc (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= \csc 30^\circ = 2$$

or

$$\csc 150^\circ = \csc (90^\circ + 60^\circ)$$

$$= \sec 60^\circ = 2$$

الزاوية التي قياسها  $210^\circ$  تقع في الربع الثالث

$$\therefore \sin 210^\circ = \sin (180^\circ + 30^\circ)$$

$$= -\sin 30^\circ = -1/2$$

or

$$\sin 210^\circ = \sin (270^\circ - 60^\circ)$$

$$= -\cos 60^\circ = -1/2$$

اكمل قيم الدوال المثلثية الباقية للزاوية التي قياسها  $210^\circ$



الزاوية التي قياسها  $330^\circ$  تقع في الربع الرابع

$$\sin 330^\circ = \sin (360^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\sin 30^\circ = -1/2$$

or

$$\sin 330^\circ = \sin (270^\circ + 60^\circ)$$

$$= -\cos 60^\circ = -1/2$$

نشاط: اكمل قيم الدوال المثلثية الباقية للزاوية التي قياسها  $330^\circ$

الزاوية التي قياسها  $420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$

ان قيم الدالة المثلثية للزاوية  $(360^\circ + 60^\circ)$  هي نفس قيمة الزاوية المثلثية  $(60^\circ)$  لماذا ؟

ملاحظة: لقد سبق ان ذكرنا بانه اذا كان قياس الزاوية اكبر من  $360^\circ$  نطرح  $360^\circ$  أو مضاعفاتها من هذا القياس الى يصبح القياس  $60^\circ$  هو القياس الرئيسي للزاوية ، وعليه فان  $420^\circ - 360^\circ = 60^\circ$

$$\therefore \sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

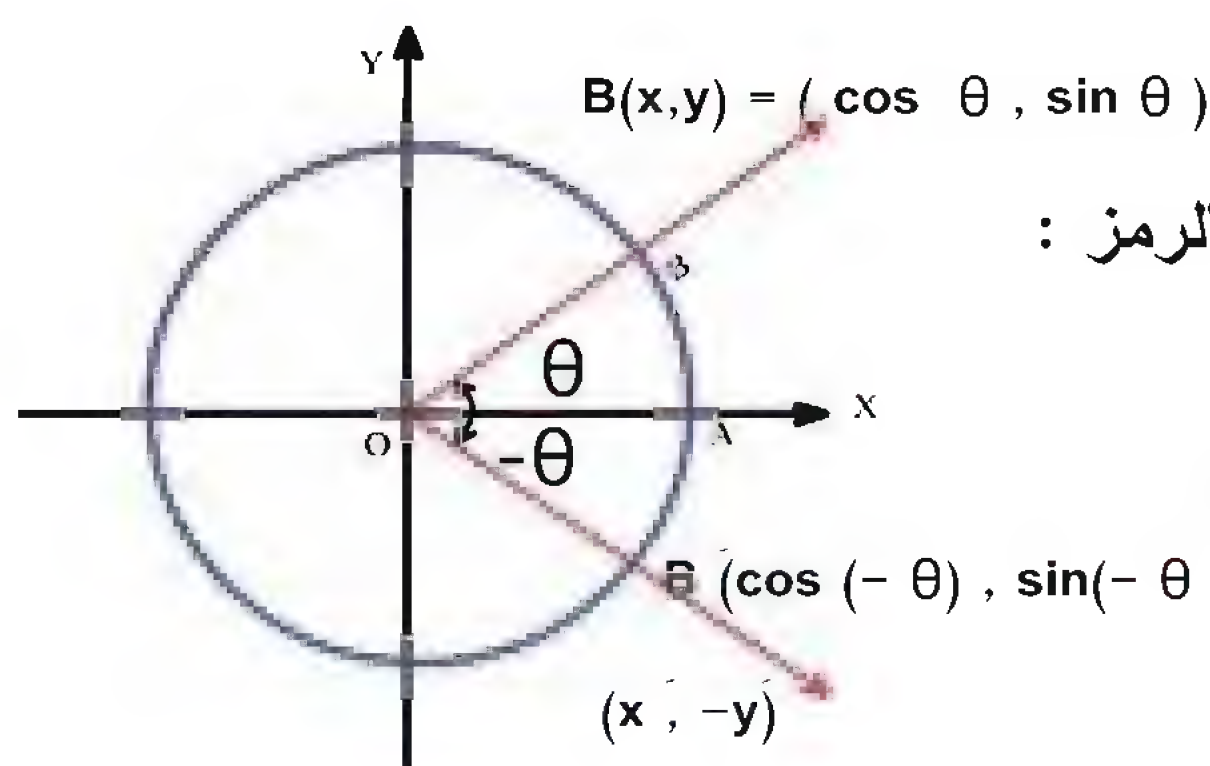
$$\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$$

نشاط: اكمل قيم الدوال الدائرية الباقية للزاوية  $420^\circ$

[4-8] قيم الدوال الدائرية للزاوية التي قياسها  $(-\theta)$

اولا: اذا كانت الزاوية التي قياسها  $(\theta)$  تقع في الربع الاول فان الزاوية التي قياسها  $(-\theta)$  تقع في الربع الرابع

لاحظ الشكل (4-15)



الشكل (4-15)

إن الزاوية AOB التي قياسها  $(\theta)$  نرمز لها بالرمز :

$$B(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

لكن  $B \rightarrow B'$  تحت تأثير انعكاس حول محور X

لذا فإن

$$B'(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$$

$$\text{ولكن : } x \rightarrow x', y \rightarrow -y'$$

لذا فإن

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

ويكون  $\tan(-\theta) = \sin(-\theta) / \cos(-\theta)$

$$= -\sin \theta / \cos \theta$$

$$\boxed{\tan(-\theta) = -\tan(\theta)}$$

**ملاحظة:** يمكن اثبات النتيجة السابقة نفسها في حالة وقوع الزاوية التي قياسها  $(-\theta)$  في الاربعاء: الثاني أو الثالث أو الأول وبالطريقة السابقة نفسها.

**مثال 12**

جد  $\cos(-240^\circ)$  ,  $\sin(-240^\circ)$

**الحل :**

$$\sin(-240) = -\sin 240^\circ$$

$$= -\sin(180^\circ + 60^\circ)$$

$$= \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$, \cos(-240^\circ) = \cos(240^\circ)$$

$$= \cos(180^\circ + 60^\circ)$$

$$= -\cos 60^\circ = -1/2$$

جد  $\tan(-300^\circ)$  ,  $\cos 780^\circ$  ,  $\sin(19\pi/2)$

**مثال 13**

**الحل :**

$$\sin(19\pi/2) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 8\pi\right)$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -1$$

$$\cos 780^\circ = \cos(2 \times 360 + 60^\circ)$$

$$= \cos 60^\circ$$

$$= 1/2$$

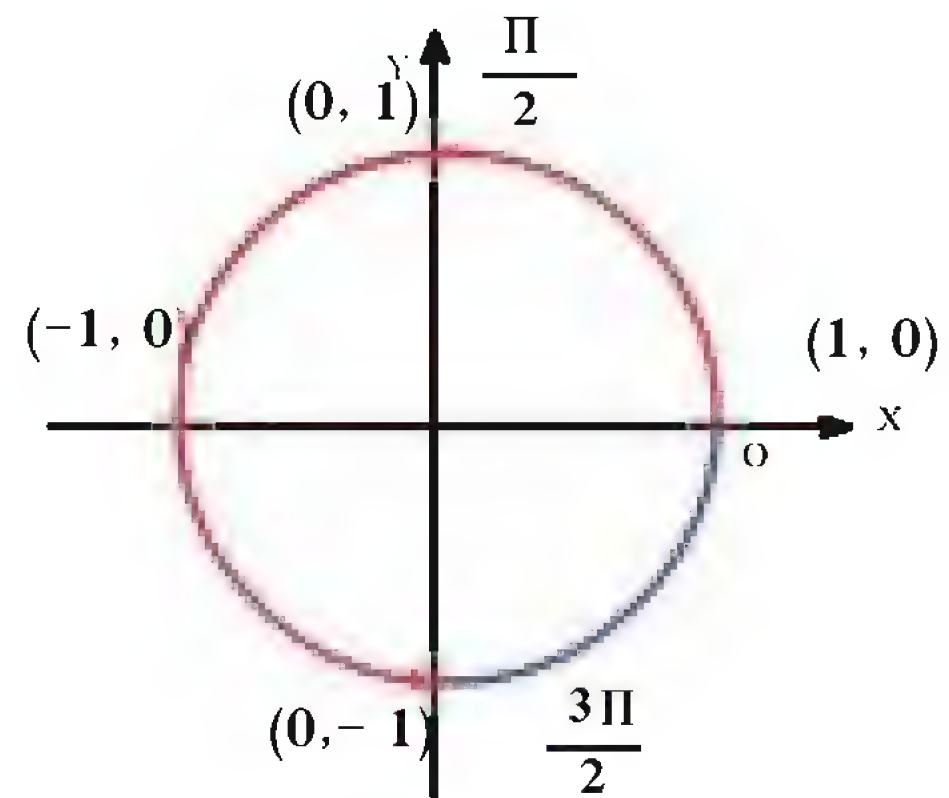
$$\tan(-300^\circ) = -\tan 300^\circ$$

$$= -\tan(360 - 60)$$

$$= -(-\tan 60)$$

$$= \tan 60$$

$$= \sqrt{3}$$



الشكل (4-16)



تمارين (4-4)

1 إذا كان  $\sin \theta = -8/17$  ،  $\theta$  تقع في الربع الثالث فجد :

$$\cos \theta , \cos (3\pi/2 - \theta) , \sin (\pi/2 + \theta)$$

2 إذا كان  $\cos \beta = 0.8$  ،  $270^\circ < \beta < 360^\circ$  فجد :

$$\sin \beta , \cos (270^\circ + \beta) , \cos (270^\circ - \beta)$$

3 إذا كان  $\sin \alpha = 24/25$  ،  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  فاحسب قيمة :

$$\sin (90^\circ - \alpha) - \cos (180^\circ - \alpha) + \cos 120^\circ$$

4 اثبت انه

$$\cos (\pi/2 + \theta) \cos (\pi/2 - \theta) - \sin(\pi + \theta) \sin(\pi - \theta) = 0$$

5 حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية  $\alpha$  إذا كان :

a.  $\sin \alpha > 0 , \cos \alpha > 0$

b.  $\sin \alpha > 0 , \cos \alpha < 0$

c.  $\sin \alpha < 0 , \cos \alpha < 0$

d.  $\sin \alpha < 0 , \cos \alpha > 0$

6 اي العبارات الاتية صحيحة وأيها خاطئة ؟

a.  $\sin 270^\circ = 2 \sin 30^\circ$

b.  $\sin 90^\circ = 2 \cos 60^\circ$

c.  $\cos 150^\circ = 1/2 \tan 120^\circ$

d.  $\cos (30^\circ + 60^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$

7 اثبت ان :

a.  $\sin (90^\circ + \alpha) + \cot(270^\circ - \alpha) + \cos (180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$

b.  $\sin^2 135^\circ = 1/2 (1 - \cos 270^\circ)$

#### [4-9] الدوال الدائرية لمجموع أو فرق قياسي زاويتين :

سوف نبحث في هذا البند دوال مثل  $\cos(x_1 - x_2)$  ,  $\cos(x_1 + x_2)$  وعلاقة ذلك بالدوال

$$\sin x_2 , \cos x_2 , \sin x_1 , \cos x_1$$

أولاً: مفكوك  $\cos(x_2 + x_1)$  ,  $\cos(x_2 - x_1)$

ولإيجاد هذه العلاقة سنستخدم الصلة بين الدوال الدائرية وحاصل الضرب الداخلي للمتجهات

(Inner Product)

وكما تعلم انه اذا كان  $\theta$  هي الزاوية بين المتجهين  $\vec{op}$  ,  $\vec{oq}$  الموضحين في الشكل (4-17) حيث:

$$(0 \leq \theta \leq \Pi \text{ وان } \theta = x_2 - x_1)$$

فان:

$$\vec{op} \cdot \vec{oq} = \|\vec{op}\| \cdot \|\vec{oq}\| \cdot \cos(x_2 - x_1).$$

$$\|\vec{op}\| = \|\vec{oq}\| = 1 \text{ فإذا اخذنا الحالة الخاصة}$$

وجدنا أن:

$$\vec{op} \cdot \vec{oq} = \cos(x_2 - x_1).$$

$$\therefore (\cos x_1 , \sin x_1) \cdot (\cos x_2 , \sin x_2) = \cos(x_2 - x_1).$$

الشكل (4-17)

ومنه نجد :

$$\cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 = \cos(x_2 - x_1). \dots 1$$

واذا عوضنا بـ  $(-x_1)$  بدلاً من  $x_1$  تصبح المتطابقة (1):

$$\cos(-x_1) \cos x_2 + \sin(-x_1) \sin x_2 = \cos(x_2 + x_1).$$

$$\therefore \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 = \cos(x_2 + x_1). \dots 2$$

احسب  $\cos 15^\circ$  ,  $\cos 75^\circ$

مثال 14

الحل:

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$



$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

ثانياً: مفكوك  $\sin (x_2 + x_1)$  ,  $\sin (x_2 - x_1)$

$$\therefore \sin (x_2 + x_1) = \cos [90^\circ - (x_2 + x_1)]$$

$$= \cos [(90^\circ - x_2) - x_1]$$

$$= \cos (90^\circ - x_2) \cos x_1 + \sin (90^\circ - x_2) \sin x_1$$

$$\sin (x_2 + x_1) = \sin x_2 \cos x_1 + \cos x_2 \sin x_1 \quad \dots 3$$

وبالتعويض عن  $x_1$  بـ  $(-x_1)$  لتصبح المتطابقة (3)

$$\sin (x_2 - x_1) = \sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1 \quad \dots 4$$

احسب  $\sin 15^\circ$  ,  $\sin 75^\circ$

مثال 15

الحل:

$$\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

مفكوك :  $\tan (x_1 - x_2)$  ,  $\tan (x_1 + x_2)$

إذا كان  $x_1$  ,  $x_2$  أي عددين حقيقيين في مجال الدالة  $\tan$  وان  $x_1 + x_2$  مجال الدالة  $\tan$

فان:

$$\tan (x_1 + x_2) = \frac{\sin (x_1 + x_2)}{\cos (x_1 + x_2)}$$



$$= \frac{\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2}$$

وبقسمة البسط والمقام على  $\cos x_1 \cos x_2$  نحصل على:

$$\frac{\frac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} + \frac{\cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}}{\frac{\cos x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} - \frac{\sin x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}}$$

$$= \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

$$\therefore \tan (x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2} \quad \dots 5$$

ولو عوضنا بـ  $(-x_2)$  بدلاً من  $(x_2)$  في المتطابقة (5) حصلنا على:

$$\tan (x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2} \quad \dots 6$$

احسب  $\tan 15^\circ$  ,  $\tan 75^\circ$

مثال 16

الحل:

$$\tan 75^\circ = \tan (45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\therefore \tan 75^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\tan 15^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\therefore \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

نتيجة (1): لكل عدد حقيقي  $x$  فان:

- a.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- b.  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- c.  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$
- d.  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$
- e.  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

بشرط المقام  $\neq$  صفر



إذا كان  $0 < \alpha < 90^\circ$ ,  $\sin \alpha = 4/5$  فاحسب :

$\tan 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\sin 2\alpha$

الحل :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore 16/25 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - 16/25 \\ = 9/25$$

$$\therefore \cos \alpha = \pm 3/5$$

$$\therefore 0 < \alpha < 90^\circ$$

$$\therefore \cos \alpha = 3/5$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \\ = 24/25$$

$$\therefore \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 9/25 - 16/25$$

$$= -7/25$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

نتيجة (2)

لكل  $x$  عدد حقيقي فإن :

$$\textcircled{1} \sin^2(x/2) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\textcircled{2} \cos^2(x/2) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

احسب  $\sin \Pi/8$  ,  $\cos \Pi/8$

مثال 18

$$\sin^2 \Pi/8 = \frac{1 - \cos \Pi/4}{2}$$

$$= \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 \sqrt{2}}$$

ي ضرب البسط والمقام في  $\sqrt{2}$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin \Pi/8 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 \Pi/8 = \frac{1 + \cos \Pi/4}{2}$$

$$\cos \Pi/8 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$



$$\cos 105^\circ , \sin 105^\circ$$

الحل : الزاوية  $105^\circ$  تقع في الربع الثاني وهي نصف الزاوية  $210^\circ$  وبأستخدام قانون نصف الزاوية نحصل على :

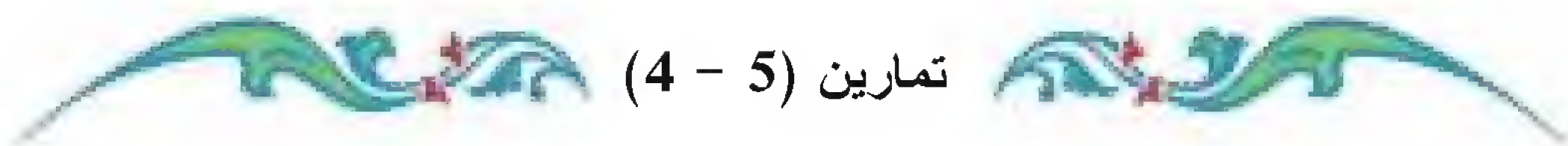
$$\begin{aligned} \sin 105 &= \sqrt{\frac{1 - \cos 210^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos(180^\circ + 30^\circ)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - (-\cos 30^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 105 &= \sqrt{\frac{1 + \cos 210^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos(180^\circ + 30^\circ)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + (-\cos 30^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

بين أن:

$$\cos^4 x/2 - \sin^4 x/2 = \cos x , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \cos^4 x/2 - \sin^4 x/2 &= (\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2)(\cos^2 x/2 + \sin^2 x/2) \\ &= \cos \left( 2 \left( x/2 \right) \right) (1) \\ &= \cos x \end{aligned}$$



1

إذا كان  $\tan x = 3/4$  وكانت  $0 < x < 90^\circ$  فاحسب:  
 $\tan 2x$  ,  $\cos 2x$  ,  $\sin 2x$

2

إذا كان  $0 < \alpha < \pi/2$  ,  $\sec \alpha = \sqrt{5}/2$   
فاحسب:  $\cot 2\alpha$  ,  $\csc 2\alpha$

3

إذا كان  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  ,  $\tan^2 \alpha = 4/9$   
فاحسب:  $\sin (2\alpha - 90^\circ)$  ,  $\cos (180^\circ - 2\alpha)$

4

إذا كان كل من  $\alpha$  ,  $\beta$  زاوية حادة موجبة بحيث  $\beta + \alpha = 45^\circ$  وكان  $\tan \alpha / \tan \beta = 2/3$   
فاحسب:  $\tan 2\alpha$  ,  $\tan 2\beta$

5 اثبت أن:

$$\cot 15^\circ \text{ ثم احسب } |\cot \alpha/2| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

بدون استخدام الحاسبات

6 اثبت صحة المتطابقات الآتية:

a)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

b)  $\sec (x-y) = \frac{\sec x \sec y}{1 + \tan x \tan y}$

c)  $\frac{\sin(-\alpha) - \sin(\beta - 90^\circ)}{-\cos(270^\circ + \alpha) + \cos \beta} + \frac{\sin(\alpha - 180^\circ) + \cos(-\beta)}{\sin(180^\circ + \alpha) + \sin(\beta + 90^\circ)}$

d)  $\tan(270^\circ - \alpha) + \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{1 - \cos(180^\circ - \alpha)} = \csc \alpha$

e)  $\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ = 1/2$



f.  $\cos 35^\circ \cos 25^\circ - \cos 55^\circ \cos 65^\circ = 1/2$

g.  $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$

h.  $\sin 4x = 8 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin x$

7 احسب  $\sin 3x$  ,  $\cos 3x$  بدلالة  $\sin x$  ,  $\cos x$

### [4-10] المعادلات المثلثية :

تعريف

المعادلة المثلثية هي جملة مفتوحة تحوي دالة مثلثية أو أكثر لزاوية معينة أو عدة زوايا ،  
وابسط صورها هي :  $\sin x = B$  ,  $\cos x = k$  حيث  $B, k \in [-1,1]$  ,  $x \in \mathbb{R}$

### أولاً: المعادلات المثلثية البسيطة :

ليكن  $x$  قياس زاوية مجهولة ،  $\theta$  قياس زاوية معلومة بحيث  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ، ولندرس الحالات الثلاث الآتية :

2.  $\sin x = \sin \theta \Leftrightarrow x = \theta \quad \text{or} \quad x = \pi - \theta$   
وبالمقياس الستيني :  $x = \theta \quad \text{or} \quad x = 180^\circ - \theta$

مثال 21

إذا كان  $\sin x = \sin 45^\circ$  فما قيم  $x$  ؟

الحل :

$$\sin x = \sin 45^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ \quad \text{or} \quad x = 180^\circ - 45^\circ$$

اي ان :  $x = 45^\circ \quad \text{or} \quad x = 135^\circ$

حل المعادلة :  $\sin x = 1/2$

مثال 22

$$\sin 30^\circ = 1/2$$

الحل : نعلم ان

$$\sin x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ \text{ or } x = 180 - 30^\circ = 150^\circ$$

b

$$\cos x = \cos \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ or } x = 2\Pi - \theta$$

وبالقياس الستيني يعني أن :  $x = \theta \text{ or } x = 360^\circ - \theta$

حل المعادلة  $\cos x = \cos 75^\circ$

مثال 23

الحل :

$$\cos x = \cos 75^\circ \Leftrightarrow x = 75^\circ \text{ or } x = 360^\circ - 75^\circ$$

$$x = 75^\circ \text{ or } x = 285^\circ : \text{ اي ان}$$

مجموعة الحل =  $\{75^\circ, 285^\circ\}$

حل المعادلة  $\cos x = -1/2$

مثال 24

الحل : بما أن  $\cos x < 0$   $\therefore x$  تقع في أحد الربعين الثاني أو الثالث

وهي منتسبة الى كل من  $180^\circ + 60^\circ$ ,  $180^\circ - 60^\circ$

لان  $\cos 60 = 1/2$

$$\cos x = -1/2 \Leftrightarrow x = 120^\circ \text{ or } x = 240^\circ \Rightarrow \{120^\circ, 240^\circ\} = \text{مجموعة الحل}$$

c

$$\tan x = \tan \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ or } x = \Pi + \theta$$

وبالقياس الستيني يعني أن :  $x = \theta \text{ or } x = 180^\circ + \theta$

حل المعادلة  $\tan x = \tan 53^\circ$

مثال 25

الحل :

$$\tan x = \tan 53^\circ \Leftrightarrow x = 53^\circ \text{ or } x = 180^\circ + 53^\circ$$

$$x = 53^\circ \text{ or } x = 233^\circ$$

مجموعة الحل =  $\{53^\circ, 233^\circ\}$



مثال 26

$$\tan x = \sqrt{3} \quad \text{حل المعادلة}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 60^\circ \quad \text{or} \quad x = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

$$\{60^\circ, 240^\circ\} = \text{مجموعة الحل}$$

مثال 27

$$\tan 4x + \cot x = 0 \quad \text{حيث أن } 0 < x < 90^\circ \quad \text{حل المعادلة}$$

$$\tan 4x = -\cot x \Rightarrow$$

$$\therefore \text{either } \tan 4x = \tan (90^\circ + x) \Rightarrow \text{(في الربع الثاني)}$$

$$4x = 90^\circ + x \Rightarrow$$

$$3x = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

$$\text{or } \tan 4x = \tan (270^\circ + x) \Rightarrow \text{(في الربع الرابع)}$$

$$4x = 270^\circ + x \Rightarrow$$

$$3x = 270^\circ \Rightarrow$$

$$x = 90^\circ \quad \text{(تُهمل)}$$

$$\{30^\circ\} = \text{مجموعة الحل}$$

حل المعادلة :

مثال 28

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

الحل : نحلل الطرف الايسر وكما يأتي :

$$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{either } \cos x = -2$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{يُهمل لانه}$$

$$\text{or } \cos x = 1/2$$

ويكون  $\cos x$  موجباً في الربعين الاول والرابع

(أ) في الربع الاول :

$$\cos x = \cos 60^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

(ب) في الربع الرابع :

$$\cos x = \cos (360^\circ - 60^\circ) \Rightarrow x = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

$$\{60^\circ, 300^\circ\} = \text{مجموعة الحل}$$

## ثانياً : المعادلات المثلثية من الصورة

$$a \sin x + b \cos x = c$$

اي انها معادلة من الدرجة الاولى بالنسبة الى  $(\sin x)$  ،  $(\cos x)$

(المعادلات المثلثية من الصورة :

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

اي انها معادلة من الدرجة الثانية في كل من  $(\sin x)$  ،  $(\cos x)$

ففي الحالة (الاولى) اذا كان احد المعاملات  $a, b, c$  يساوي صفراً فإن المعادلة تتحول

الى معادلة بسيطة ويمكن حلها كما في الحالة (أولاً )

اما اذا كان كل من هذه المعاملات لا يساوي صفراً فيمكن توضيح حلها اذا كان

$$c^2 \leq a^2 + b^2 \quad \text{وكما في المثال الآتي :}$$

حل المعادلة :

مثال 29

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

الحل : لحل هذا النوع من المعادلات نتبع الآتي :

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\tan \frac{\pi}{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$((\sin \frac{\pi}{3}) / (\cos \frac{\pi}{3})) \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos (\frac{\pi}{3} - x) = \sqrt{3} / 2$$

يكون  $\cos x$  موجباً في الربعين الاول والرابع

$$\therefore \text{either} \quad \cos (\frac{\pi}{3} - x) = \cos (\frac{\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{or} \quad \cos (\frac{\pi}{3} - x) = \cos (-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{6} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \}$$

اما الحالة (الثانية) فنعوض عن الدوال المثلثية للزاوية بدلالة جيب وجيب تمام ضعف الزاوية

فتكون :

$$a \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + b \left( \frac{\sin 2x}{2} \right) + c \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) = d$$



حل المعادلة الآتية :

مثال 30

$$2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 3$$

الحل : حيث ان  $0^\circ \leq x < 90^\circ$

$$2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + \sqrt{3}(\sin x \cos x) + 3\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 3$$

$$2 - 2\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 3 + 3\cos 2x = 6$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{3} \sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\left(\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) / \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)\right) \sin 2x + \cos 2x = 1 \Rightarrow$$

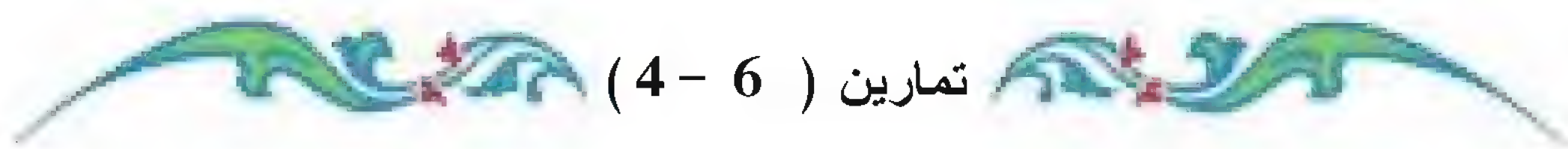
$$\sin \frac{\pi}{3} \sin 2x + \cos \frac{\pi}{3} \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$\cos x$  موجبة أما الربع الأول أو الربع الرابع فأما

$$\therefore \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \therefore \frac{\pi}{3} - 2x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$$



حل المعادلات الآتية :

1  $\sin x = \sqrt{3} / 2$

3  $\tan x = \sqrt{3} / 3$

5  $\cos 4x = \cos(x + \pi)$

7  $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$

9  $\cos x = 2 \sin^2(x/2)$

11  $\cos x = \sqrt{2} \sin^2 x$

13  $\cos^3 x = \sin^3 x$

2  $\cos x = \sqrt{2} / 2$

4  $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

6  $\tan 4x - \cot x = 0$

8  $\cos^2 x - \cos x = 0$

10  $\tan 2x = 3 \tan x$

12  $2 \sin^2 x = \cos 2x(4 \sin 2x - 1)$

14  $\sin x + \cos x = 1$



## [ 4 - 11 ] رسم منحنيات الدوال المثلثية Graph of Trigonometric Functions

تمهيد:

كثير من الحوادث والظواهر الطبيعية تتكرر بشكل متماثل في فترات متساوية من الزمن، مثل:

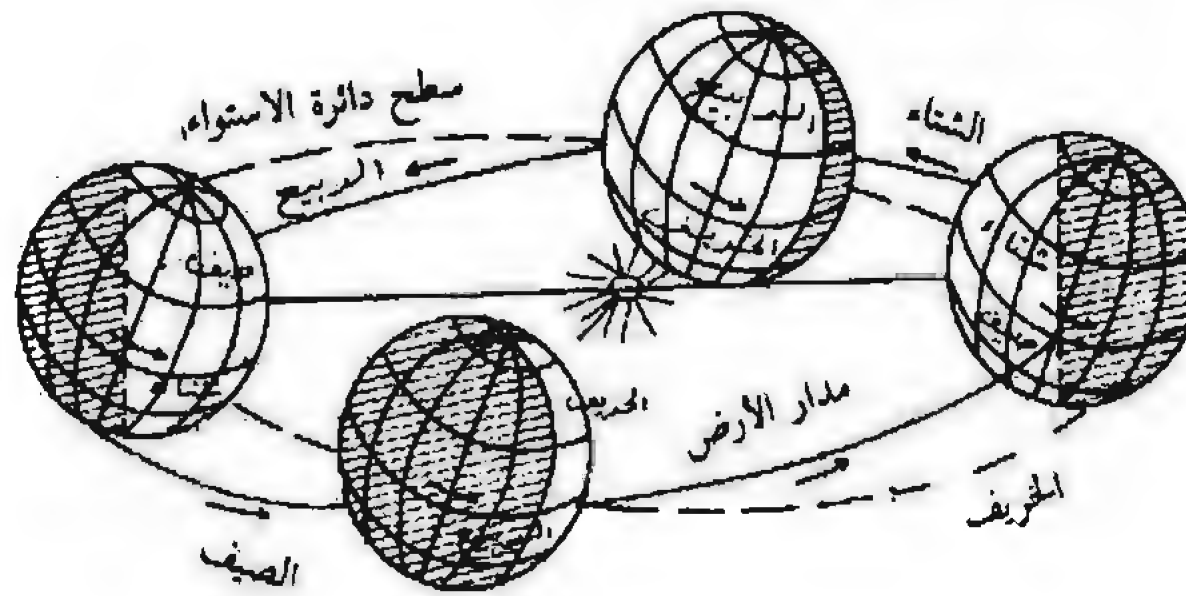
1. رؤية وجه من اوجه القمر من على سطح الارض، فنحن نراه:

هلالاً ، تربيعاً أول ، بدرأ ، تربيعاً ثانياً ، محاق ، .

ثم يتكرر ذلك كل (29) يوماً و (12) ساعة و (44) دقيقة و (3) ثوانٍ.

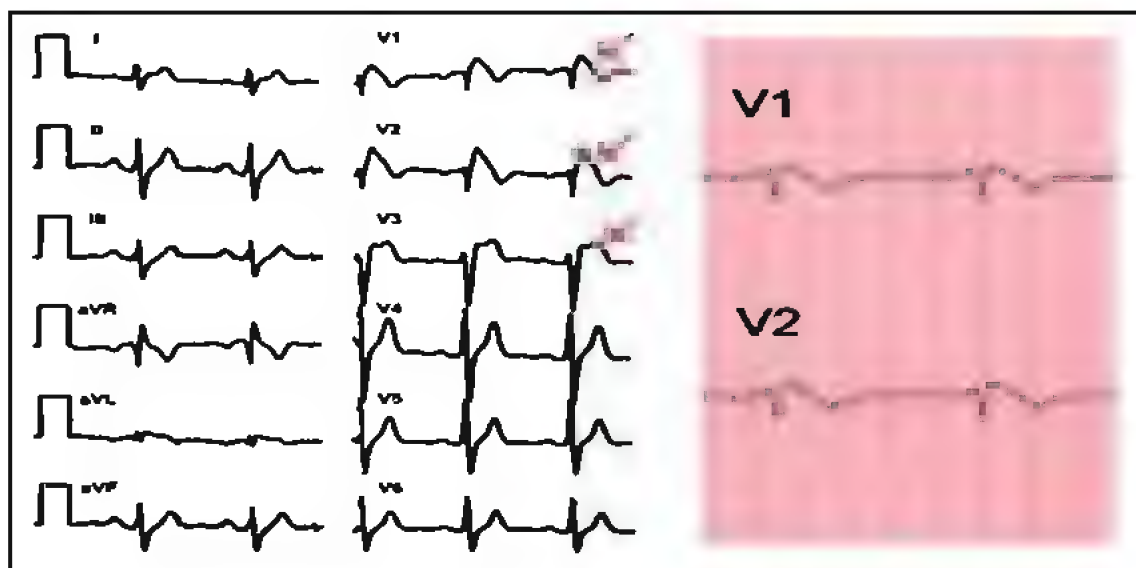


2. دوران الارض حول الشمس يتكرر بصفة منتظمة كل فترة زمنية معلومة.



3. جميع حركات الموجات التي توصف بانها كهرومغناطيسية مثل موجات الضوء، موجات الراديو،

كذلك الموجات التي يبثها الرادار عند عمله، جميعها موجات مستعرضة وهي تتكرر في فترات زمنية متساوية.



وان رسم الدوال المثلثية هو من النوع الذي يتكرر في دورات محدودة وذلك لان هذه الدوال هي دوالاً دورية.



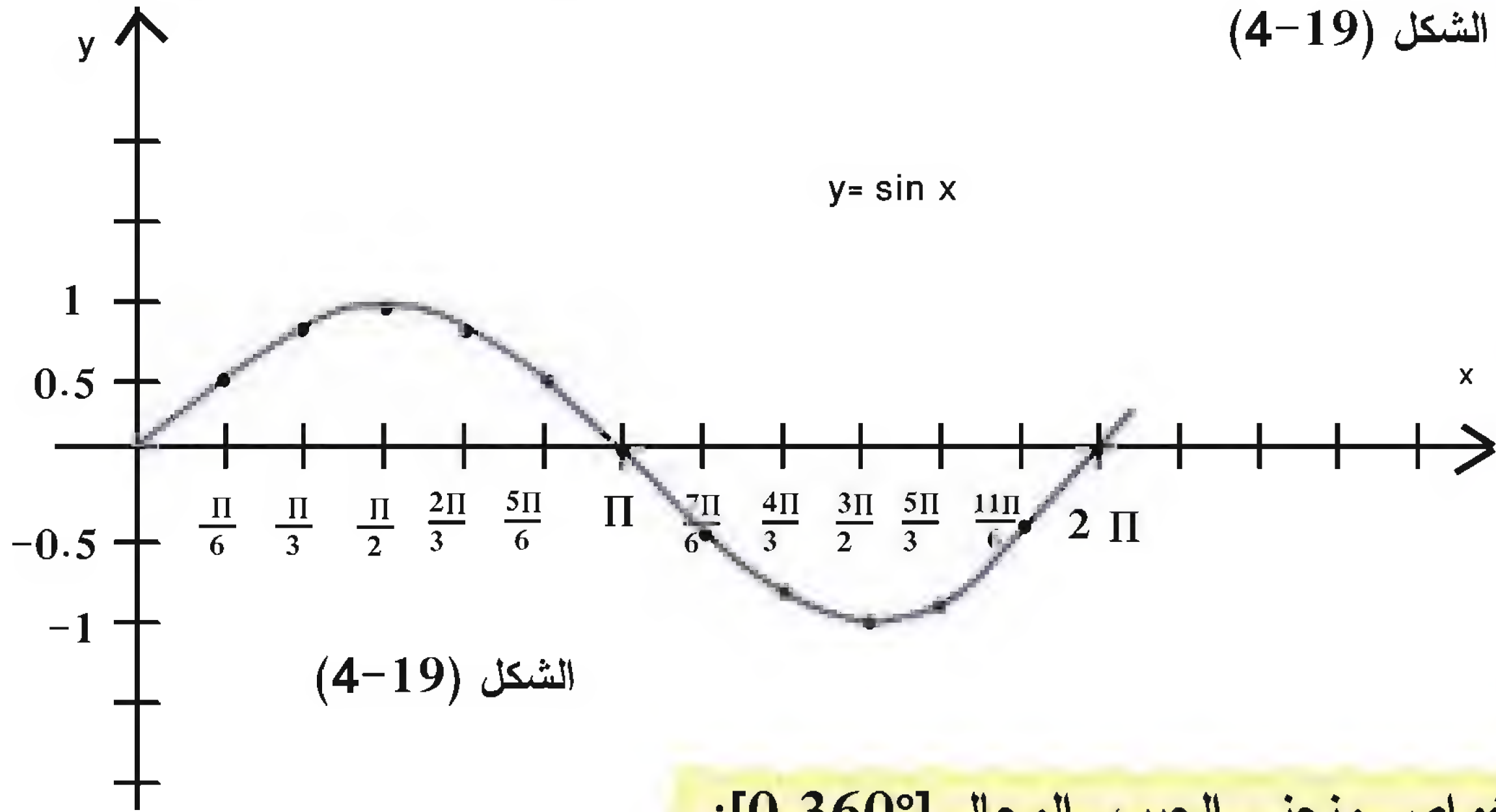
### أولاً: رسم منحنى جيب الزاوية. ( $y = \sin x$ )

إذا تغير قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي، تتغير قيمة الدالة الدائرية تبعاً لها. فمثلاً إذا تغير قياس الزاوية من  $0^\circ$  إلى  $360^\circ$  (أو من 0 إلى  $2\pi$ ) فإننا نحصل على قيم مختلفة لدالة الجيب لهذه الزاوية ضمن الفترة  $[-1, 1]$ .

فإذا كانت  $y$  تساوي قيمة الجيب وكانت الزاوية هي  $x$  فإن  $y = \sin x$ . وللتمثيل البياني لدالة الجيب ننشئ جدولاً يبين قيم  $x$  والقيم المناظرة لها  $y$ . كما في الجدول الآتي:

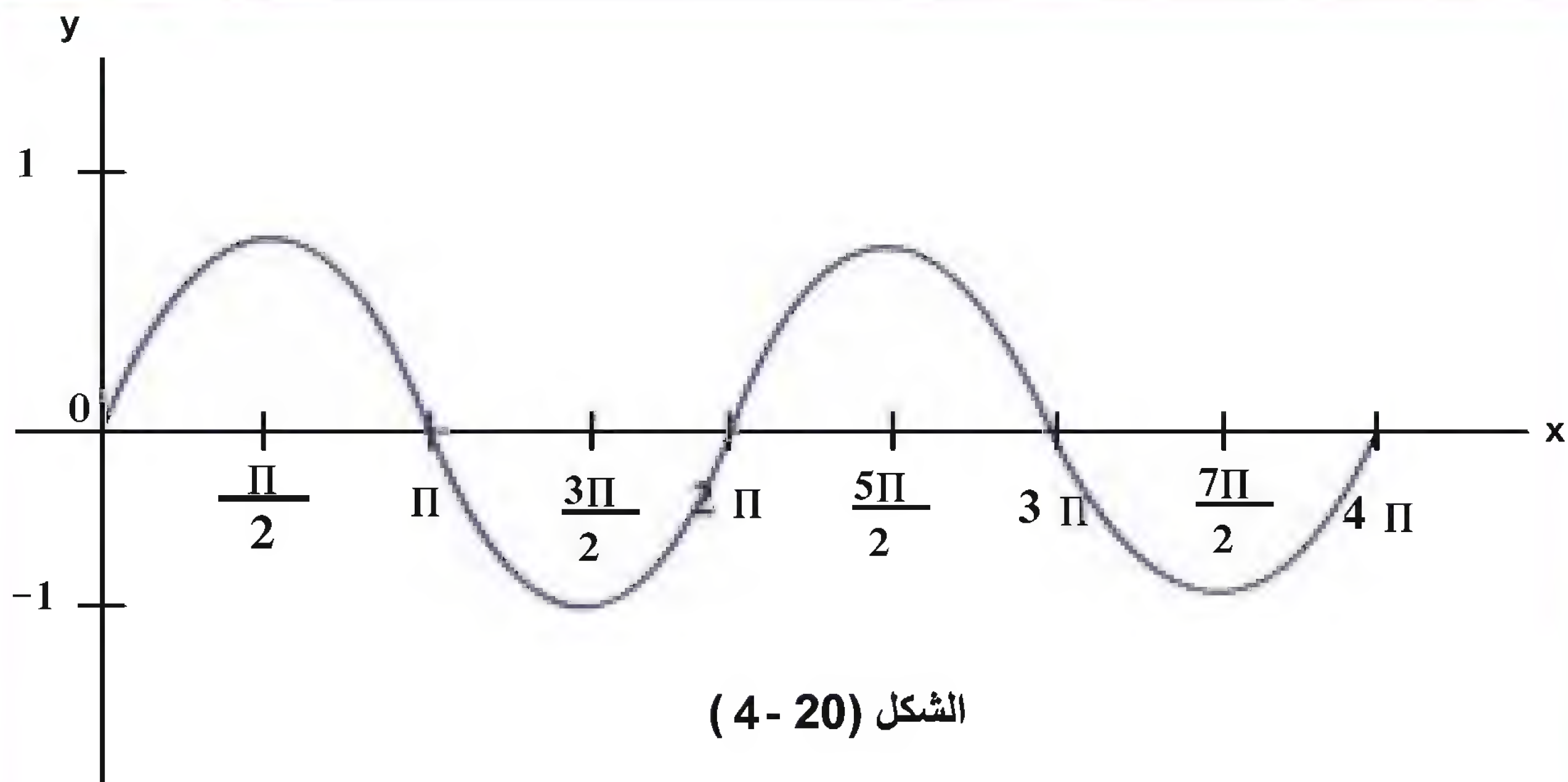
$x$	$0^\circ$	$30^\circ$ $\frac{\pi}{6}$	$60^\circ$ $\frac{\pi}{3}$	$90^\circ$ $\frac{\pi}{2}$	$120^\circ$ $\frac{2\pi}{3}$	$150^\circ$ $\frac{5\pi}{6}$	$180^\circ$ $\pi$	$210^\circ$ $\frac{7\pi}{6}$	$240^\circ$ $\frac{4\pi}{3}$	$270^\circ$ $\frac{3\pi}{2}$	$300^\circ$ $\frac{5\pi}{3}$	$330^\circ$ $\frac{11\pi}{6}$	$360^\circ$ $2\pi$
$y = \sin x$	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	-0.5	-0.86	-1	-0.86	-0.5	0

نحدد الأزواج التي نحصل عليها من  $x$  ,  $y$  ثم نرسم على ورقة المربعات منحنى الجيب ويكون كما في الشكل (4-19)



### خواص منحنى الجيب. المجال $[0, 360^\circ]$ :

1. يقطع منحنى الجيب محور السينات عند  $x = 0^\circ$  ,  $x = 180^\circ$  ,  $x = 360^\circ$
2. أكبر قيمة للجيب عند  $x = 90^\circ$  وتساوي 1
3. أصغر قيمة للجيب عند  $x = 270^\circ$  وتساوي -1.
4. عندما  $x \in (0, 180^\circ)$  تكون قيمة  $\sin x$  موجبة ويكون المنحنى واقعاً أعلى محور السينات.
5. عندما  $x \in (180^\circ, 360^\circ)$  يكون قيمة  $\sin x$  سالبة ويكون المنحنى واقعاً أسفل محور السينات.
6. لو رسمنا  $y = \sin x$  في الفترة  $[2\pi, 4\pi]$  نجد أن بيان  $\sin$  كرر نفسه. لاحظ الشكل (4-20)



الشكل (20 - 4)

مثل هذه الدالة نطلق عليها دالة دورية.  
والفترة التي كرر فيها المنحني نفسه ( $2\pi$ ) تسمى دورة الدالة.

ويسمى العدد:  $\frac{1}{\text{دورة الدالة}}$  بالتردد ، ويسمى العدد  $\frac{\text{أكبر قيمة} - \text{أقل قيمة}}{2}$  سعة الدالة.

أي أن: دورة الدالة  $y = \sin x$  هي  $2\pi$

وان التردد  $= 1/2\pi$

وان السعة  $= \frac{1 - (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

مثال:

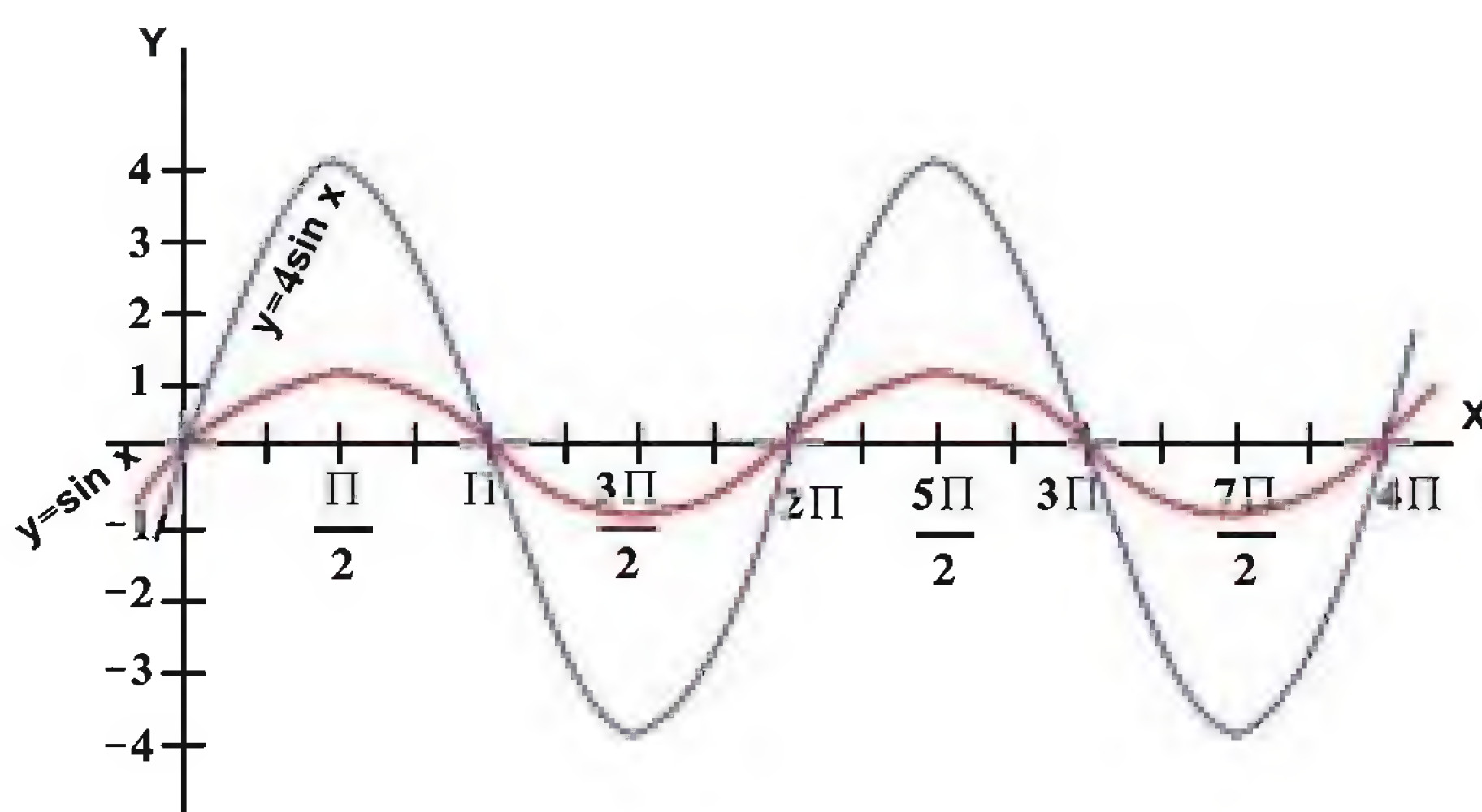
ارسم بيان الدالة  $y = 4 \sin x$  ومن الرسم جد:

الدورة التردد السعة

الحل: الجدول الآتي يوضح

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$\frac{5\pi}{2}$	$3\pi$	$\frac{7\pi}{2}$	$4\pi$
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$4\sin x$	0	4	0	-4	0	4	0	-4	0





دورة الدالة  $y = 4 \sin x$  هي  $2\pi$

التردد  $1/2\pi =$

السعة  $4 = (4 - (-4))/2 =$

نشاط:

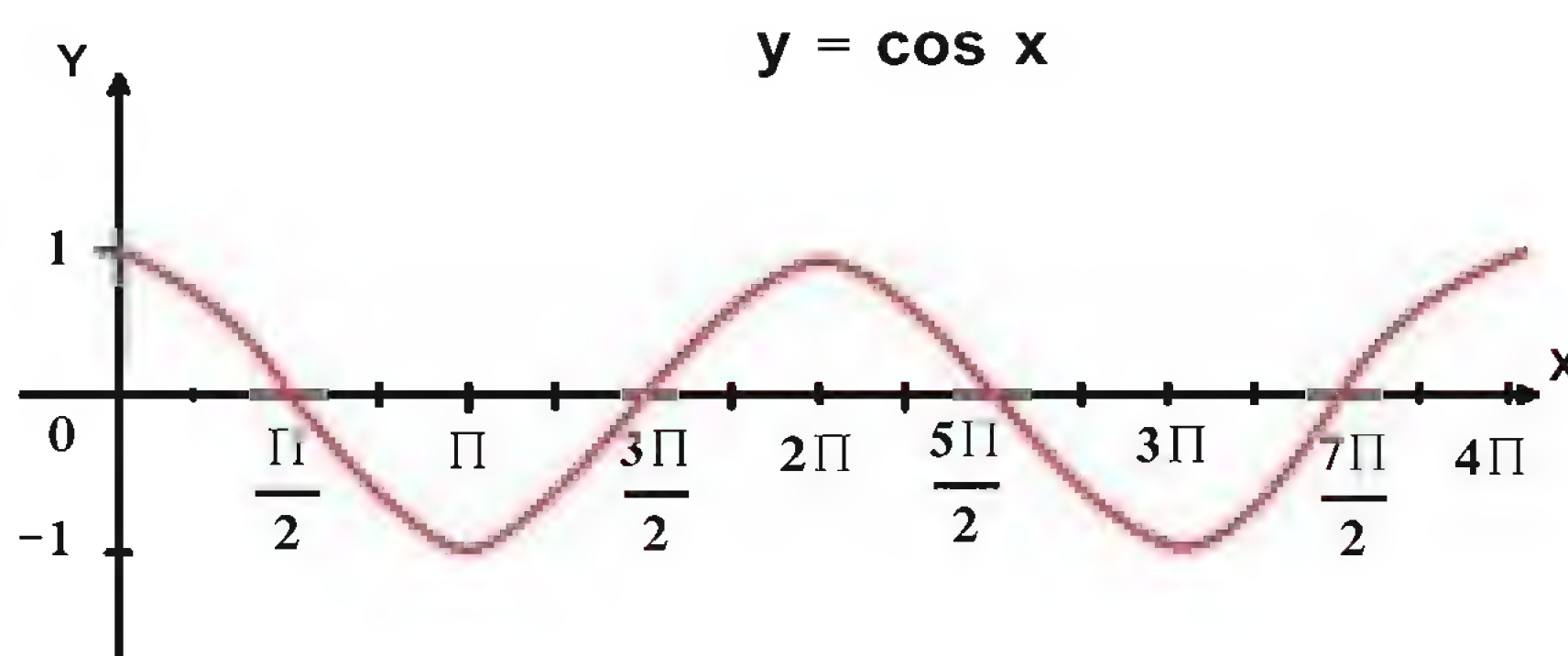
أ. ارسم بيان الدالة  $y = \sin 2x$  وعين السعة والتردد والدورة.

ب. ارسم بيان الدالة  $y = \sin 3x$  وعين السعة والتردد والدورة.

ثانياً: رسم بيان الدالة  $y = \cos x$

الحل: نكون جدولاً يبين العلاقة بين  $x$  ,  $\cos x$  كما يأتي:

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$\frac{5\pi}{2}$	$3\pi$	$\frac{7\pi}{2}$	$4\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



لو نظرنا الى البيان في الفترة  $[0, 2\pi]$  وفي الفترة  $[2\pi, 4\pi]$  نجدهما متشابهان تماماً في الفترتين أي أن بيان  $\cos$  يكرر نفسه كل فترة طولها  $2\pi$  وعلى ذلك فإن الدالة  $y = \cos x$  دورية.

دورة الدالة  $y = \cos x$  هي  $2\pi$

التردد  $\frac{1}{2\pi}$

السعة = 1

نشاط:

1. ارسم بيان الدالة  $y = \cos \frac{1}{2} x$  في الفترة  $[0, 4\pi]$  ومن الرسم عين دورة الدالة وترددها وسعتها.

2. ارسم بيان الدالة  $y = 2 \cos 4x$  في الفترة  $[0, \pi]$

ومن الرسم عين كلاً من دورة الدالة وترددها وسعتها.

**خواص منحنى الجيب التمام ( $y = \cos x$ )**

1. يقطع محور السينات عند  $x = \frac{\pi}{2}$  ,  $x = 3\frac{\pi}{2}$

2. أكبر قيمة لجيب التمام عند  $x = 0$  ,  $x = 2\pi$  تساوي 1

3. أصغر قيمة لجيب التمام عند  $x = \pi$  تساوي -1

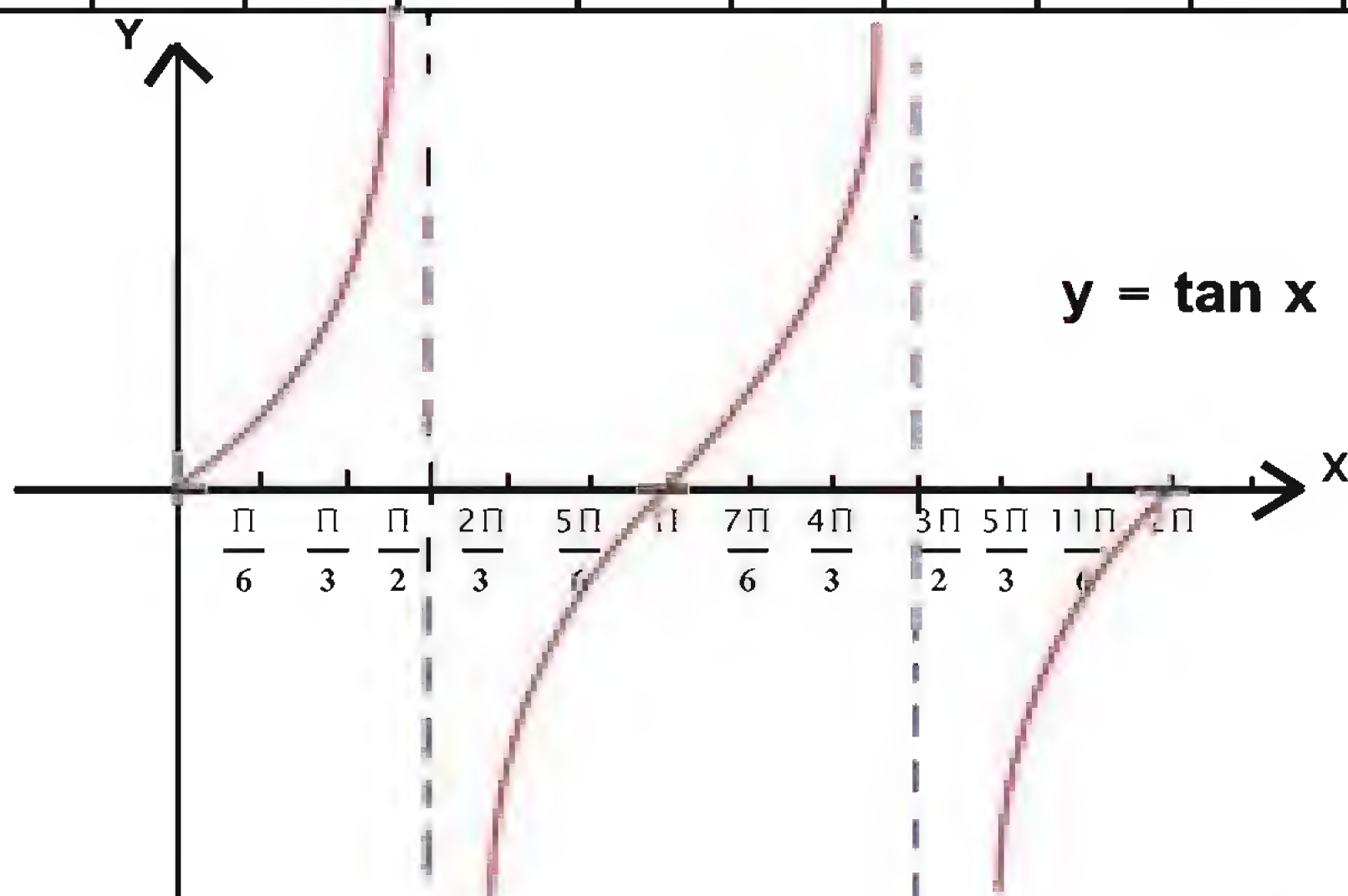
4. عندما تكون  $x$  من 0 الى  $\frac{\pi}{2}$  يكون منحنى الجيب التمام موجباً، إذ يكون أعلى محور السينات وعندما تأخذ  $x$  القيم من  $\frac{\pi}{2}$  الى  $3\frac{\pi}{2}$  يكون منحنى الجيب تمام سالباً، إذ يكون أسفل محور السينات. وعندما تأخذ  $x$  القيم من  $3\frac{\pi}{2}$  الى  $2\pi$  يكون منحنى الجيب التمام موجباً إذ يكون أعلى محور السينات.



## رسم منحنى الظل: $(y = \tan x)$

نكون جدولاً يبين العلاقة بين  $x$  ,  $y = \tan x$

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
y=tan x	0	0.6	1.7	غير معرفة	-1.7	-0.6	0	0.6	1.7	غير معرفة	-1.7	-0.6	0



الدالة  $y = \tan x$  دورية

ودورتها  $\pi$

التردد  $1/\pi$

المنحنى ليس محدود لا من اعلى ولا من اسفل لذا ليس له سعة

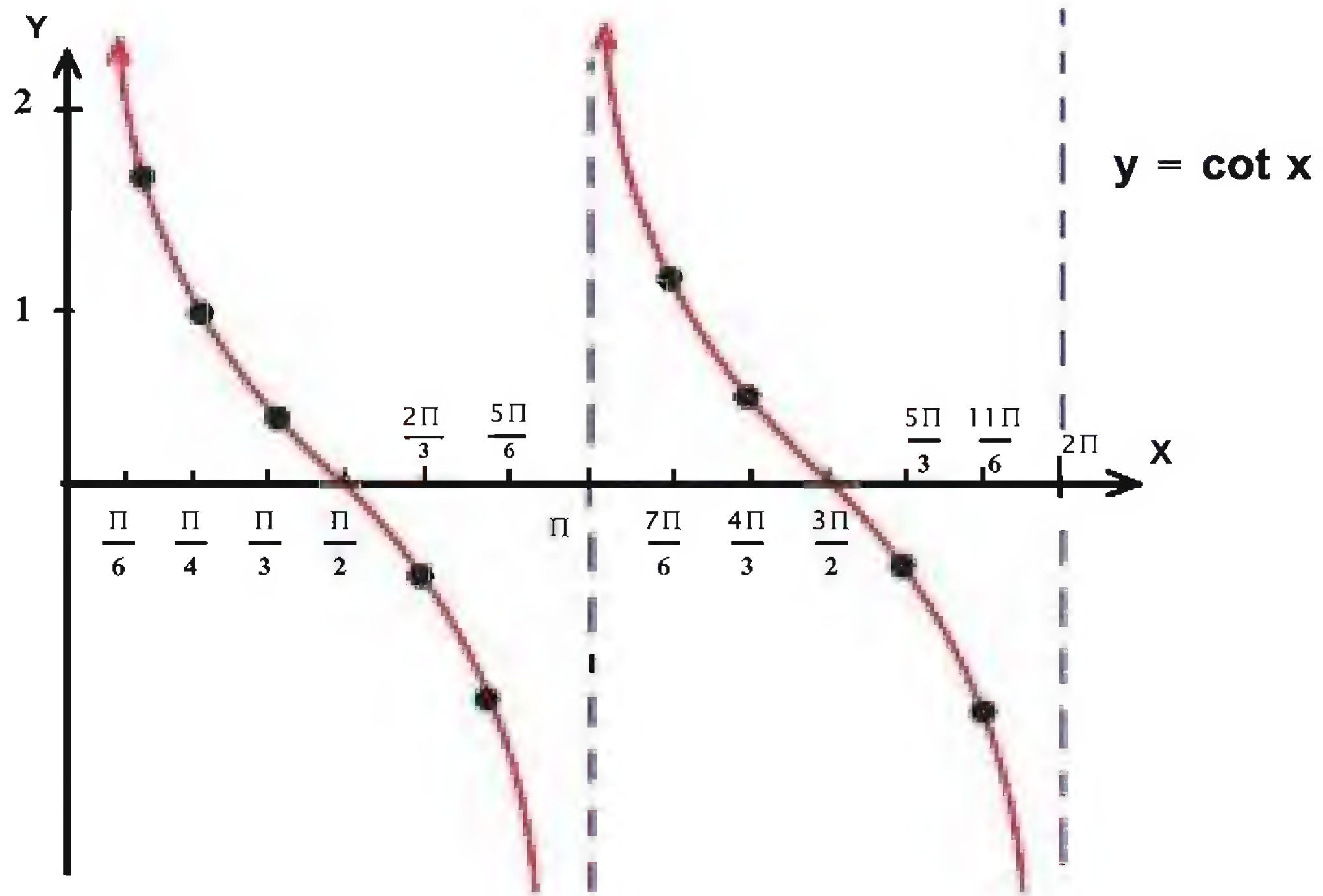
خواص منحنى الظل:  $y = \tan x$

1. يقطع المحور السيني عند  $x$  تساوي:  $0^\circ$  ,  $180^\circ$  ,  $360^\circ$
2. المنحنى غير متصل كما في منحنى الجيب ومنحنى الجيب تمام.
3. عندما تكون  $x$  بين  $0^\circ$  ,  $90^\circ$  يكون الظل موجباً، وكلما اقتربنا من  $x = 90^\circ$  نجد قيمة الظل تزداد ازدياداً كبيراً
4. عندما تكون بين  $90^\circ$  ,  $180^\circ$  يكون الظل سالباً وعندما تقع  $x$  بين  $180^\circ$  ,  $270^\circ$  يكون الظل موجباً
5. يكون سالباً عندما تقع  $x$  ما بين  $270^\circ$  ,  $360^\circ$

رابعاً: رسم منحنى ظل التمام:  $y = \cot x$

نكون جدولاً يبين العلاقة بين  $\cot x$ ,  $x$  وكما يأتي:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$y=\cot x$	غير معرفة	1.7	1	0.6	0	-0.6	-1.7	غير معرفة	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	غير معرفة



خواص منحنى ظل التمام:

1. يقطع محور السينات عند  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$

2. المنحنى غير متصل.

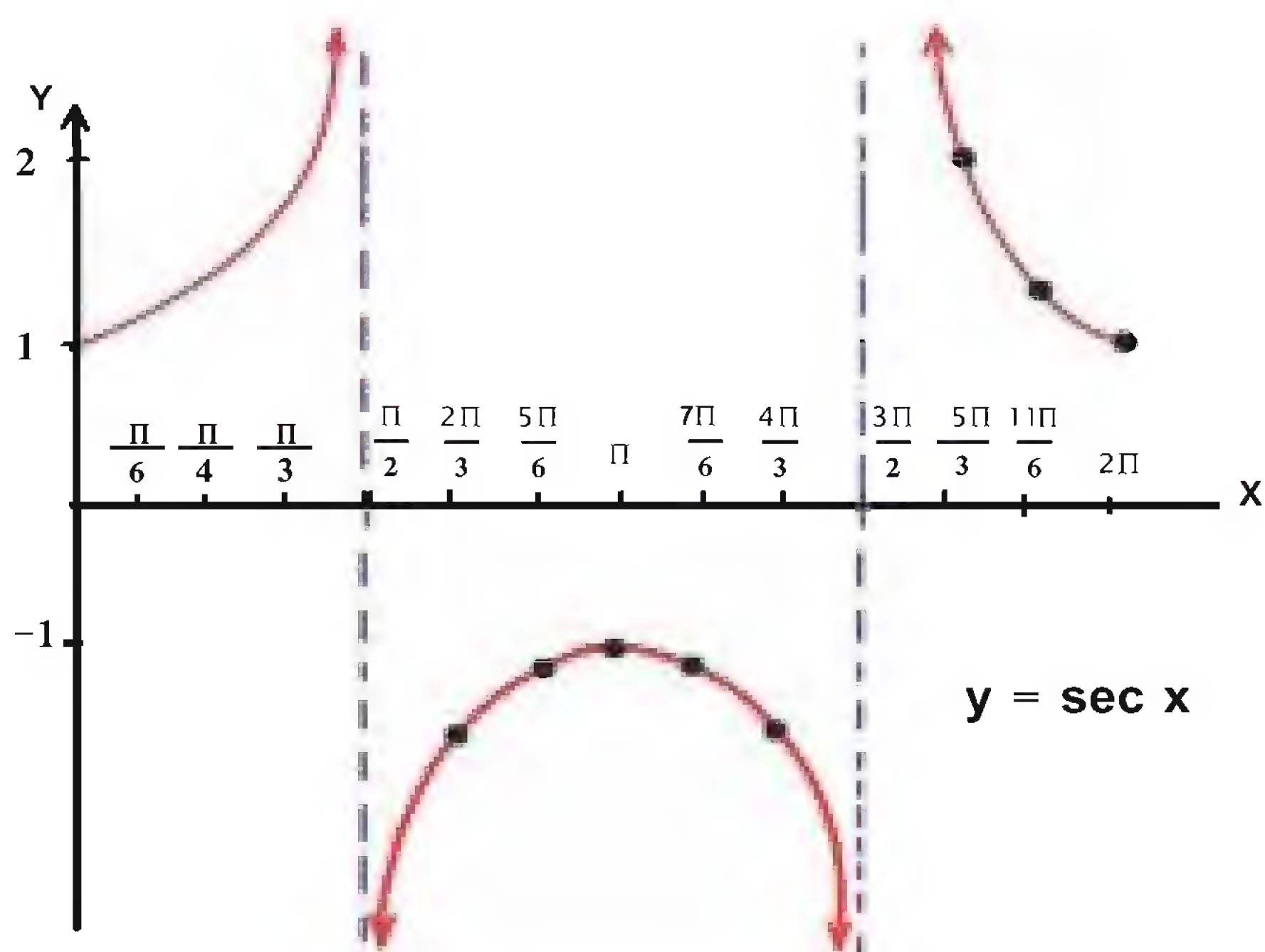
3. عندما تكون  $x$  بين 0 و  $\frac{\pi}{2}$  نجد ان ظل التمام موجب، وعندما تكون  $x$  ما بين  $\frac{\pi}{2}$  و  $\pi$  نجد انه سالب وعندما تكون  $x$  ما بين  $\pi$  و  $\frac{3\pi}{2}$  يصبح موجباً، وعندما تكون  $x$  ما بين  $\frac{3\pi}{2}$  و  $2\pi$  يكون سالباً.



**خاصة:** رسم منحنى قاطع الزاوية:  $y = \sec x$

نكوّن جدولاً يبين العلاقة بين  $x$  ,  $y = \sec x$  كما يأتي:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$y=\sec x$	1	1.2	1.4	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة	2	1.2	1



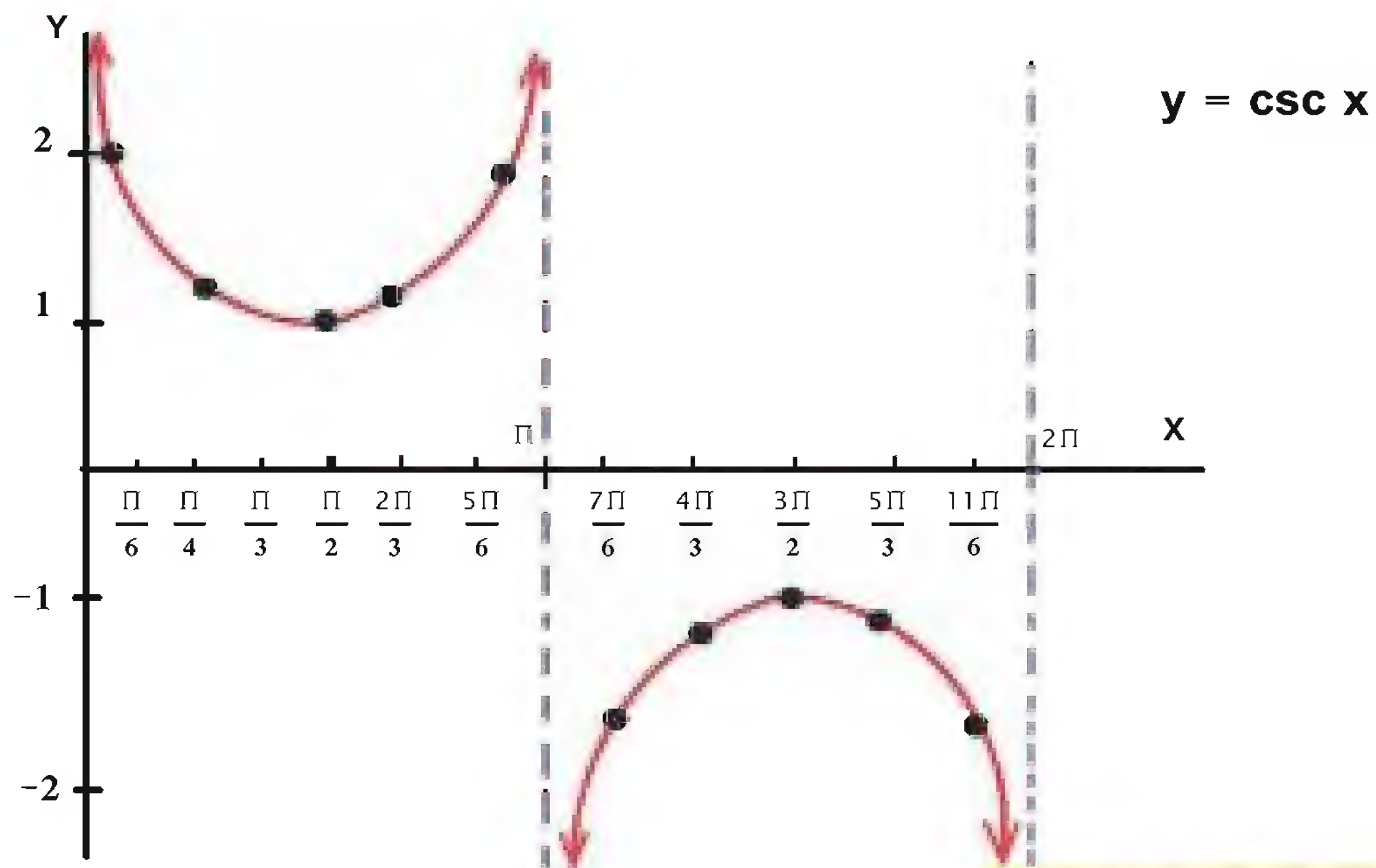
**خواص منحنى القاطع:**

- 1 لا يقطع منحنى القاطع محور السينات على الإطلاق.
- 2 عندما  $x$  ما بين 0 و  $\pi/2$  يكون المنحنى موجباً.
- 3 عندما  $x$  ما بين  $\pi/2$  و  $3\pi/2$  يكون المنحنى سالباً.
- 4 عندما  $x$  ما بين  $3\pi/2$  و  $2\pi$  يكون المنحنى موجباً.
- 5 المنحنى غير متصل.
- 6 المنحنى غير محدود لا من الأعلى ولا من الأسفل لذا ليس له سعة

**سابقاً:** رسم منحنى قاطع التمام:  $y = \csc x$

نكوّن جدولاً يبين العلاقة بين  $x$  ,  $y = \csc x$

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$y = \csc x$	غير معرفة	2	1.4	1.2	1	1.2	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة



خواص منحنى قاطع التمام

- 1 المنحنى لا يقطع محور السينات.
- 2 عندما  $x$  ما بين 0 الى  $\pi$  يكون المنحنى موجبا اعلى محور السينات.
- 3 عندما  $x$  ما بين  $\pi$  الى  $2\pi$  يكون المنحنى سالبا اسفل محور السينات.
- 4 المنحنى غير متصل.
- 5 دورة المنحنى  $2\pi$  والتردد  $\frac{1}{2}$ .
- 6 المنحنى غير محدود لا من الاعلى ولا من الاسفل لذا ليس له سعة.



1 ارسم بيان كل من الدوال الآتية. ومن الرسم استنتج كلا من دورة الدالة وترددتها وسعتها:

1.  $y = \sin 3x$  on  $[0, 4\pi/3]$
2.  $y = -\sin x$  on  $[0, 2\pi]$
3.  $y = 3\sin 2x$  on  $[0, 2\pi]$
4.  $y = \cos 2x$  on  $[-\pi, 2\pi]$
5.  $y = -2\cos x$  on  $[-2\pi, 2\pi]$
6.  $y = 2 \cos 3x$  on  $[0, 3\pi]$
7.  $y = 2 \tan x$  on  $[-\pi/2, 3\pi/2]$
8.  $y = \tan 2x$  on  $[0, \pi]$

2 اختبار موضوعي

1 ضع إشارة + أو - في المستطيلات التالية لتحصل على عبارة صحيحة :

- a.  $\cos (20^\circ + 50^\circ) = \cos 20^\circ \cos 50^\circ \boxed{\phantom{000}} \sin 20^\circ \sin 50^\circ$
- b.  $\tan(3A - 2B) = \tan 3A \boxed{\phantom{000}} \tan 2B / 1 \boxed{\phantom{000}} \tan 3A \tan 2B$
- c.  $\sin(80^\circ \boxed{\phantom{000}} 10^\circ) = \sin 80^\circ \cos 10^\circ - \cos 80^\circ \sin 10^\circ$

2 اكمل ما يأتي لتحصل على عبارة صحيحة

- a.  $\sin(40^\circ + 180^\circ) = \sin 40^\circ \boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}} \sin 180^\circ$
- b.  $2\sin \pi/3 \cos \pi/3 = \sin \boxed{\phantom{000}}$
- c.  $\frac{2 \tan x/3}{1 - \tan^2 x/3} = \boxed{\phantom{000}}$
- d.  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos \boxed{\phantom{000}}$

3 عيّن العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يأتي:

- a.  $\sin 6x = 2 \sin 3x$
- b.  $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$
- c.  $\cos 80^\circ = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ$
- d. مجموعة حل المعادلة  $2\cos x + 3 = 0$  هي  $\emptyset$

4. اختر من القائمة A ما يناسبها من القائمة B

القائمة A

1.  $\cos 4A \cos A - \sin 4A \sin A =$
2.  $\sin A \cos 4A - \sin 4A \cos A =$
3.  $\sin 4A \cos A + \cos 4A \sin A =$

القائمة B

- a.  $\sin 5A$
- b.  $\cos 5A$
- c.  $\sin 3A$
- d.  $\sin (-3A)$

5. اختبار مقالي

1. إذا كان  $2\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  وكانت  $\cos x = \frac{2}{3}$  فاوجد قيمة كل من  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\csc x$

2. إذا كان  $2\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  وكانت  $\cos x = \frac{3}{5}$  فاوجد قيمة كل من  $\cos 2x$ ,  $\sin 2x$ ,  $\tan 2x$ ,  $\sin(x/2)$ ,  $\cos(x/2)$ .

3. بدون استخدام الحاسبة اوجد قيمة:

a.  $\sin \pi/8 \cos \pi/8$

b.  $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$

a.  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

b.  $\tan(x/2) = (1 - \cos x) / \sin x$

4. اثبت صحة كل من المتطابقات الآتية



## Chapter 5

### الغاية والاستمرارية Limit and Continuity

[5-1] جوار العدد

[5-2] غاية الدالة

[5-3] غاية الدوال الدائرية

[5-4] الاستمرارية

الرمز أو العلاقة الرياضية	المصطلح
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	غاية الدالة $f(x)$ عندما $x \rightarrow a$
$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$	إستمرارية $f(x)$ عند $x = b$

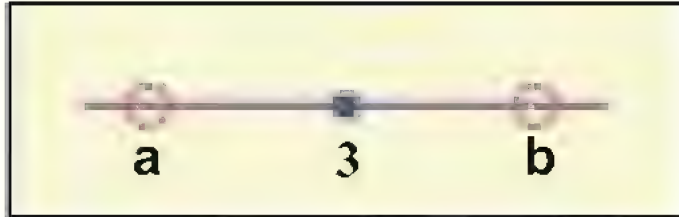
## الفصل الخامس

### الغاية والاستمرارية

غاية الدالة واستمراريتها limit and continuity

تمهيد :

إذا نظرنا في الشكل (1-5) نلاحظ نقطتين الأولى  $a$  تقع على يسار العدد 3 والاخرى  $b$  تقع على



يمين العدد 3

فإذا فرضنا ان  $a$  تأخذ قيماً متزايدة

شكل (1-5)

2.9 , 2.99 ..... , 2.999, .....

تتقارب باستمرار نحو العدد 3 من اليسار ونرمز لذلك بالرمز  $a$  نقول ان

$$a \rightarrow 3$$

وإذا اعطينا  $b$  قيماً متناقصة

3.1 , 3.01 , 3.001 , ..... 3.000001 .....

نقول ان  $b$  تتقارب باستمرار نحو العدد 3 من اليمين ونرمز لذلك بالرمز

$$b \rightarrow 3$$

[1-5] جوار العدد neighbourhood

على ضوء ما سبق يمكنك ان تتفهم التعريف الآتي :

-11

إذا كان  $a$  عدداً ( نقطة ) وكان  $\epsilon$  ( تقرأ إبسلون ) عدداً موجباً تسمى الفترة

1 -  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  جواراً للعدد  $a$  ( الجوار هنا يحوي  $a$  )

2 -  $(a - \epsilon, a]$  جواراً ليسر العدد  $a$  ( الجوار هنا يحوي  $a$  )

3 -  $[a, a + \epsilon)$  جواراً ليمين العدد  $a$  ( الجوار هنا يحوي  $a$  )

ويرمز لمجموعة الجوار بالرمز  $N$

فمثلاً

إذا كان  $a = 1, \epsilon = 1/2$  فان

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) \text{ جواراً للعدد } 1$$



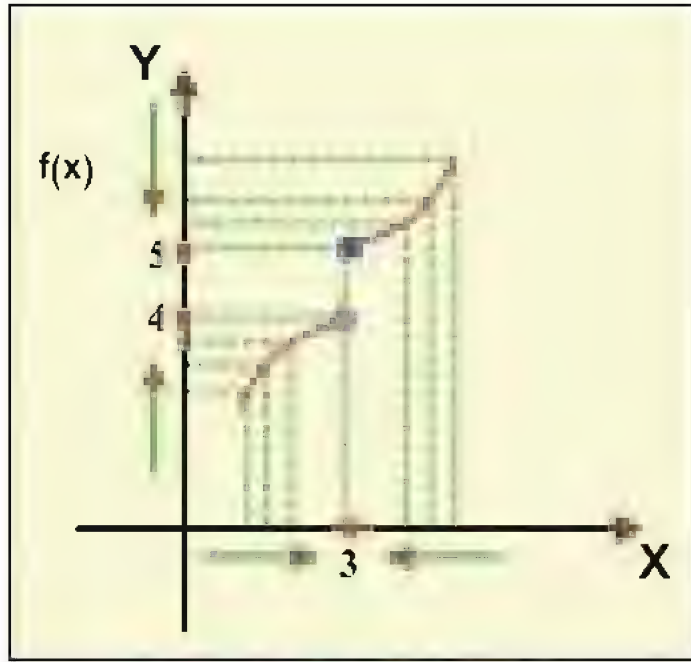
$$2 \quad \left( 1 - \frac{1}{2}, 1 \right] \text{ جواراً يساراً للعدد } 1$$

$$3 \quad \left[ 1, 1 + \frac{1}{2} \right) \text{ جواراً يميناً للعدد } 1$$

## [5-2] غاية الدالة (limit of a function)

### تمهيد توضيحي :

سنعطي فيما يأتي توضيحاً هندسياً اي باستخدام الرسم فقط للتعريف بمفهوم الغاية إذ سنكتفي بأدراك أولي للتعريف عن طريق الحواس ثم ننتقل بعد ذلك الى التعريف المحدد ففي الشكل (5-2)



الشكل (5-2)

نلاحظ ان هناك بياناً للدالة  $f$  ( منفصلة هندسياً ) عندما  $x=3$  كما يمكنك ان تلاحظ ان  $y = f(x)$  تأخذ قيمةً متقاربة من 4 وذلك عندما تتقارب  $x$  من 3 من اليسار وكلما اردنا ان نجعل  $f(x)$  اكثر قرباً الى 4 فانه يمكننا ذلك عن طريق اعطاء  $x$  قيمةً اكثر قرباً الى 3 من اليسار وفي هذه الحالة نقول :

$$\text{أن } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$$

وتقرأ غاية الدالة عند 3 من اليسار تساوي 4

### لاحظ :

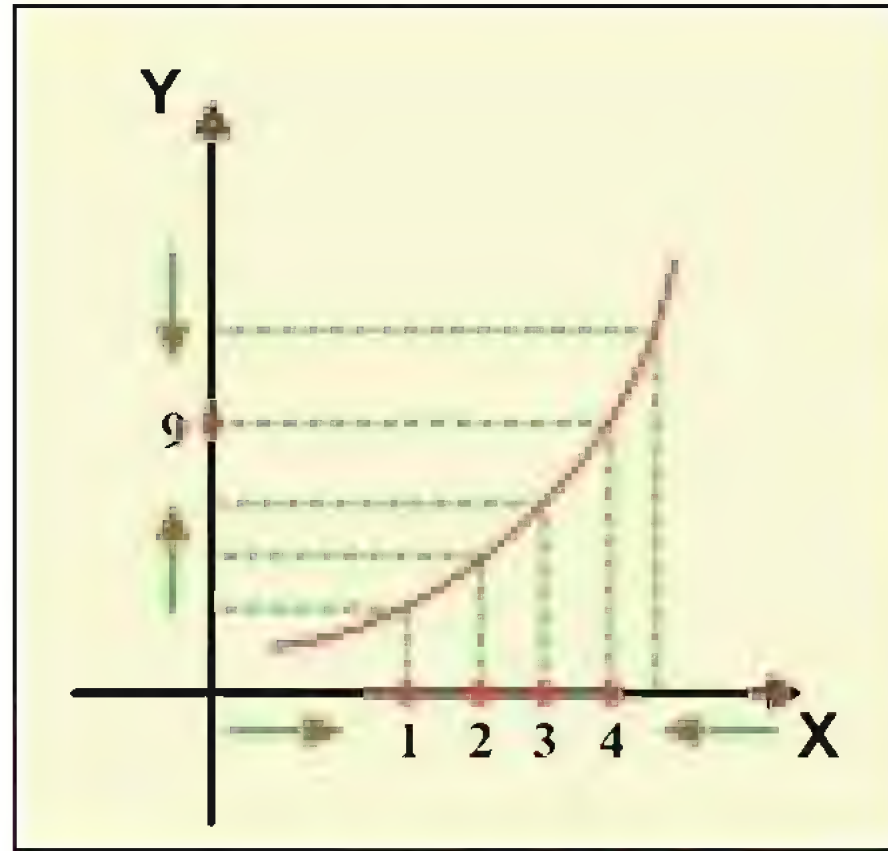
اننا لم نتعرض لذكر ما اذا كانت الدالة معرفة او ليست معرفة عند  $x = 3$  كما يمكنك ان تلاحظ  $f(x)$  تتقارب من 5 كلما اقتربت  $x$  الى 3 من جهة اليمين وفي مثل هذه الحالة نقول ايضاً :

$$\text{غاية الدالة تساوي 5 عندما } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$$

تتقارب  $x$  الى 3 من اليمين وتقرأ غاية الدالة عند 3 من اليمين تساوي 5

لاحظ اننا لم نذكر فيما اذا كانت الدالة معرفة او ليست معرفة عند  $x = 3$

شكل (5-3)



ملاحظة :

الدالة تتقارب من 9 عندما تتقارب  $x$  من 4 من اليسار واليمين او

$f(x)$  تتقارب من 9 عندما تتقارب  $x$  من 4 وهذا يعني

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 9$$

وفي هذه الحالة عندما تتساوى النهايتان لدالة مثل  $f$  عند نقطة مثل 4 من اليسار واليمين

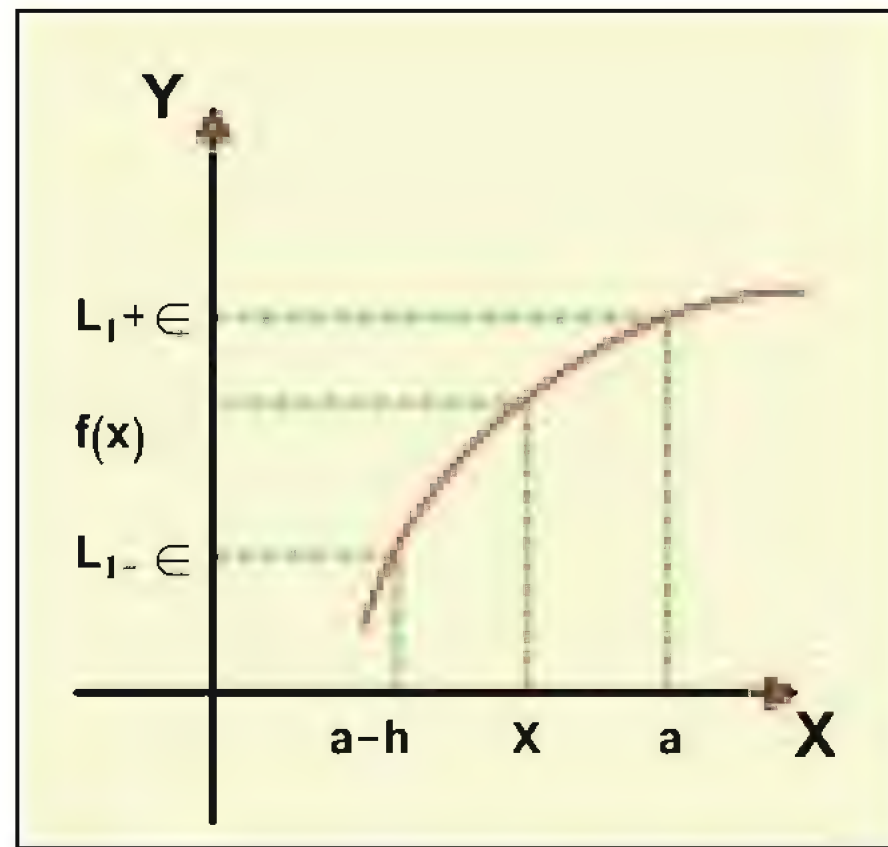
تقول ان للدالة  $f$  غاية عند 4 ونعبر عن ذلك بالصورة الرمزية .

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 9$$

الغاية عند  $x \rightarrow a$

اعتماداً على ما عرضناه سابقاً في تقديم مفهوم الغاية باستخدام الرسوم التوضيحية كما في

الشكل ( 6-4 ) وقلنا بأن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



شكل (5-4)

تفهم من هذا عموماً انه :

بأمكننا دوماً ان نجعل  $f(x)$  قريبة من  $L$  بقدر ما نشاء وذلك بأعطاء  $x$  قيمة قريبة من  $a$  من

اليسار بصورة مناسبة .



فإذا اردنا اعطاء صيغة رياضية كهذا الفهم العام فهذا سيكون على النحو الاتي :

1. إذا حددنا اي معيار للقرب من  $L$  مثل  $\epsilon > 0$

2. يمكننا تحديد جوار ايسر  $N_1$  للعدد  $a$  مثلاً  $(a-h, a)$

حيث  $h$  عدد حقيقي موجب بحيث  $h \leq \epsilon$  :

عندما

$$x \in N / \{a\} \Rightarrow$$

$f(x)$  تكون قريبة من  $L$  حسب المعيار  $\epsilon$

$$x \in N / \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

ومنه نتوصل الى التعريف الاتي :

**[1-2-5] تعريف**

إذا قلنا  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  فهذا يعني  $\forall \epsilon > 0$

يوجد جوار ايسر  $N_1$  للنقطة  $a$  ( العدد )

$$x \in N_1 / \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

يمكنك ان تلاحظ بأنه لأثبت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  لابد من ايجاد الخطوات الآتية :

1. حدد مجال الدالة

2. تأكد في ضوء تحديدك لمجال الدالة فيما اذا كانت  $f$  معرفة من يسار  $a$  ( بمعنى معرف على الفترة :

$$N / \{a\} = (a-h, a)$$

**لاحظ أننا لا نشترط ان الدالة معرفة عند  $a$**

3. اختر  $\epsilon > 0$

4. ضع  $|f(x) - L| < \epsilon$  ثم باشر بحل المتباينة السابقة فإذا استطعت ان تحدد جوراً ايسر

مثل  $N$  للعدد  $a$  بحيث :

عندما تكون :

$$x \in N / \{a\}$$

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{فأن}$$

تكون صحيحة وبذلك تكون قد اثبت صحة المطلوب منك .

### مثال

ليكن  $f(x) = 2x - 1$  اثبت ان  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

الحل :

باستخدام التعريف

1. مجال  $R = f$

2. بما ان  $f$  معرفة على  $R$  فهي معرفة في يسار 2 اي ان  $f$  معرفة على اية فترة

مثل  $(2-h, 2)$

3. لتكن  $\epsilon > 0$

$$|f(x) - 3| < \epsilon \quad 4.$$

$$|2x-1-3| < \epsilon$$

$$|2x-4| < \epsilon$$

$$-\epsilon < 2x-4 < \epsilon$$

$$4 - \epsilon < 2x < 4 + \epsilon$$

$$2 - \frac{\epsilon}{2} < x < 2 + \frac{\epsilon}{2}$$

وهذا يعني اذا كانت :

$$x \in (2 - \frac{\epsilon}{2}, 2 + \frac{\epsilon}{2}) \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$$

تكون صحيحة :

$$(2 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}, 2 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}) = (2 - \epsilon, 2)$$

فنجد ان

$$\text{اذا كانت } x \in N/\{2\} \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon \text{ تكون صحيحة}$$

∴ الغاية المعطاة صحيحة

وبنفس الطريقة غاية الدالة عندما  $x \rightarrow a$  من اليمين



### [5-2-2] تعريف

إذا قلنا بأن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  فهذا يعني  $\forall \epsilon > 0$  يوجد جوار  $N$  للنقطة  $a$

$$x \in N/\{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

من الواضح بأنه إذا كانت :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

وهذا يعني ان :

1 وجود الغاية عند النقطة  $a$  يؤدي الى وجود غاية من اليسار وغاية من اليمين عند  $a$  كلتاهما متساويتان .

2 إذا وجدت غاية عند النقطة  $a$  من اليمين وغاية عند  $a$  من اليسار وكان :  
 $L_1 \neq L_2$  فان الغاية عند  $a$  ليست موجودة أو لا تكون معرفة .

### [5-2-3] بعض مبرهنات الغاية

فيما يأتي مجموعة من المبرهنات التي تساعد في حساب الغاية ويمكن اثبات صحتها باستخدام تعريف الغاية وكما في الامثلة السابقة ، ولكننا سنكتفي بذكر منطوق هذه المبرهنات ونستخدمها في حل امثلة واسئلة للغاية في هذه المرحلة من الدراسة .

#### مبرهنة (1)

إذا كان  $N$  جوار للعدد  $a$  وكانت الدالة معرفة  $\forall x \in N/\{a\}$

وكانت  $f(x) = C$  حيث  $C \in R$  ، ثابت فان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$$

مثلا

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{5} = \sqrt{5} , \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$



## مبرهنة (2)

إذا كان  $N$  جوار للعدد  $a$  وكانت الدالة  $f(x) = x$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

مثلاً

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

## مبرهنة (3)

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  موجودة ،  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  موجودة

فإن

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \mp \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [c f(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) / g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x), [\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0]$

أمثلة

مثال 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) &= \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 2 \\ &= 3+2 = 5 \end{aligned}$$

مثال 2

أ.  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = [\lim_{x \rightarrow a} x]^2 = a^2$

ب.  $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x+3)^3 &= [\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)]^3 \\ &= [\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3]^3 \\ &= [2 + 3]^3 \\ &= 125 \end{aligned}$



### مثال 3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x) &= \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 3x \\ &= (-1)^2 + (3(-1)) \\ &= 1 - 3 = -2\end{aligned}$$

### مثال 4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 4}{x - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x - 1)} \\ &= \frac{2(-2)^2 - 4}{-2 - 1} = \frac{8 - 4}{-3} = \frac{-4}{3}\end{aligned}$$

### مثال 5

لتكن  $f(x) = |x-1| / x-1$  ,  $x \neq 1$  جد ان امكن .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 / x-1 = 1 & , x > 1 \\ -(x-1) / x-1 = -1 & , x < 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 = -1 = L_2\end{aligned}\right\}$$

$\therefore L_1 \neq L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  غير موجودة

## مثال 6

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x \geq 1 \\ 5x & , x < 1 \end{cases}$$

جد .

$$1 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

الحل :

$$1 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4) = 4 + 4 = 8$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4) = 1 + 4 = 5 = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (5x) = 5 \times 1 = 5 = L_2 \end{cases}$$

$$\therefore L_1 = L_2 \iff \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \quad \text{الغاية موجودة}$$

## مثال 7

جد :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2)$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$



### مثال 8

جد :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{(x - a)} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

### مثال 9

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + 3 & , x \leq 2 \\ c - 2x & , x > 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{إذا كانت} \\ \text{إذا كانت} \end{array}$$

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 11$  جد قيمة  $b, c \in \mathbb{R}$

الحل :

موجودة  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (c - 2x) = c - 4 \Rightarrow c - 4 = 11 \Rightarrow c = 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (bx^2 + 3) = 4b + 3 \Rightarrow 4b + 3 = 11 \Rightarrow b = 2$$

### [5-3] غاية الدوال الدائرية limit of circular function

لقد تعلمت ان الدوال الكثيرة الحدود مستمرة عند اية نقطة من نقاط مجالها في هذا البند سنتناول دراسة غايات ومشتقات الدوال الدائرية ونبدأ بايجاد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x / x)$$

مبرهنة (1) :

حيث  $x$  بالقياس الدائري

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x / x) = 1$$

البرهان :

$$cb < cd \text{ طول القوس } < dh$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow 1/\sin x > 1/x > \cos x / \sin x$$

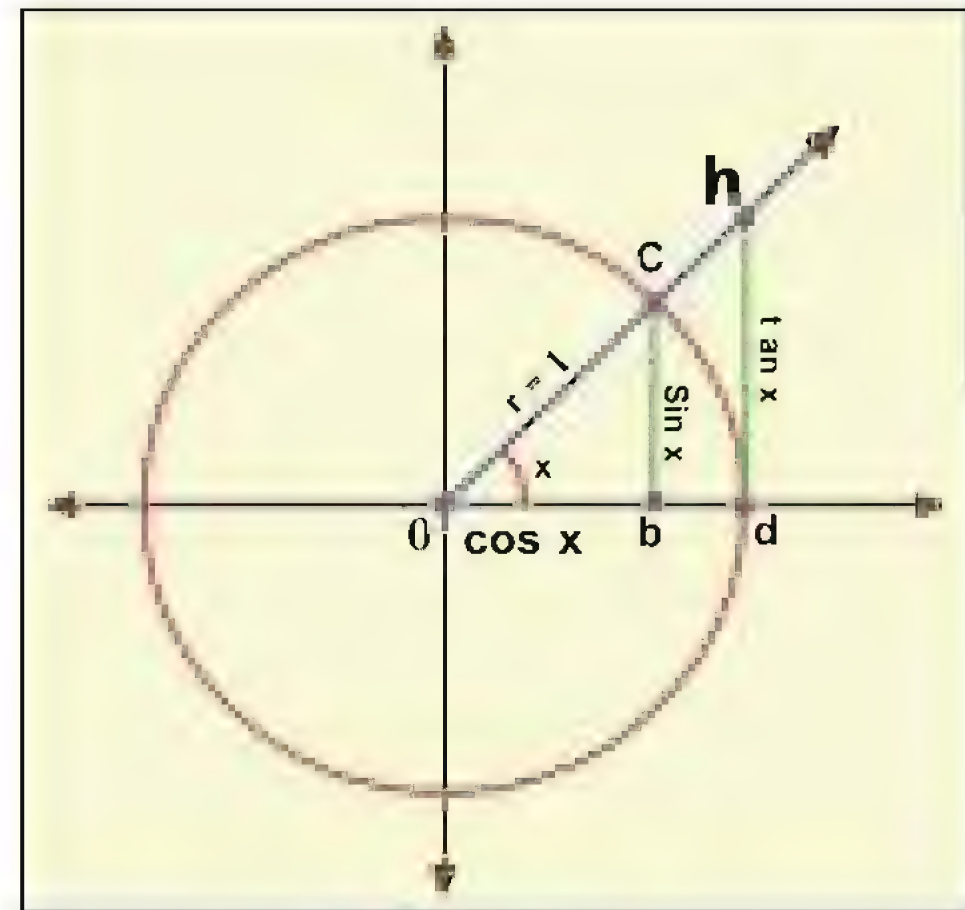
$$\Rightarrow 1 > \sin(x / x) > \cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 1 > \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x / x) > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$\Rightarrow 1 > \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x / x) > 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x / x) = 1$$

بضرب طرفي التراجحة بـ  $(\sin x)$



الشكل (5-5)

مبرهنت غايات الدوال الدائرية

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin ax / ax = 1$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan ax / ax = 1$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$



### مثال 1

جد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x / 4x$$

الحل :

$$\begin{aligned} &= 1/4 \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x / x \\ &= 3 / 4 \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x / 3x = 3/4 \times 1 = 3/4 \end{aligned}$$

### مثال 2

جد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x \tan 2x}$$

الحل :

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{x \tan 2x}{x^2}}$$

$$= \frac{4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x}}$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 4 \times 1}{2 \times 1} = 8$$

### مثال 3

جد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x + \tan 3x}{\sin 5x}$$

الحل :

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 4x}{x} + \frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

بقسمة البسط والمقام على ( x )

$$= \frac{4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{4x} + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{(4 \times 1 + 3 \times 1)}{5 \times 1} = \frac{4 + 3}{5} = \frac{7}{5}$$

### مثال 4

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt{\cos 2x}) / x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} \right) \times \left( \frac{1 + \sqrt{\cos 2x}}{1 + \sqrt{\cos 2x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)}{x^2 (1 + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2 (1 + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= 2 \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{\cos 2x})} = 2 \frac{1 \times 1}{1 + 1} = 1$$



## تمارين (5-1)

1 جد الغاية لكل مما يأتي:

a.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - x - 6)}{(x - 3)}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)}{(2x - 2)}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 4)$

e.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+5} - 3}, \{x: x \geq -5\} \setminus \{4\}$

2 إذا كان  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

جد  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  حيث  $f(x) = |x-1|$

3  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & x > -1 \\ x^2 + 3 & x < -1 \\ 4 & x = -1 \end{cases}$$

إذا كانت  $x > -1$

إذا كانت  $x < -1$

إذا كانت  $x = -1$

ارسم المخطط البياني لهذه الدالة

هل للدالة غاية عند  $-1$  بين ذلك ؟

جد  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{إذا كانت } x > -1 \\ 6 & x = -1 \\ 4x + b & \text{إذا كانت } x < -1 \end{cases}$$

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$  جد قيمة  $a, b \in \mathbb{R}$

5. إذا كان  $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$

$f(x) = x^2 + 6$

جد  $\lim_{x \rightarrow 0} (g/f)(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} (g \cdot f)(x)$

6. جد النهاية لكل مما يأتي :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{\sin^2 x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \sin 2x + \frac{\tan 4x}{6x} \right]$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3x}{\sin 2x} + \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 x} \right]$



## [5-4] الاستمرارية continuity

تكون الدالة مستمرة عند  $x = b$  اذا حققت الشروط الثلاث التالية :

1. معرفة  $f(b)$
2. موجوده  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$

تعريف:

يقال للدالة  $f$  مستمرة اذا كانت مستمرة في جميع عناصر مجالها .

### مثال 1

اذا كانت  $f(x) = 8 - x^3 - 2x^2$  اثبت ان الدالة مستمرة .

الحل:

$$\forall b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b} (8 - x^3 - 2x^2) \\ &= 8 - b^3 - 2b^2 \end{aligned}$$

$$f(b) = 8 - b^3 - 2b^2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$$

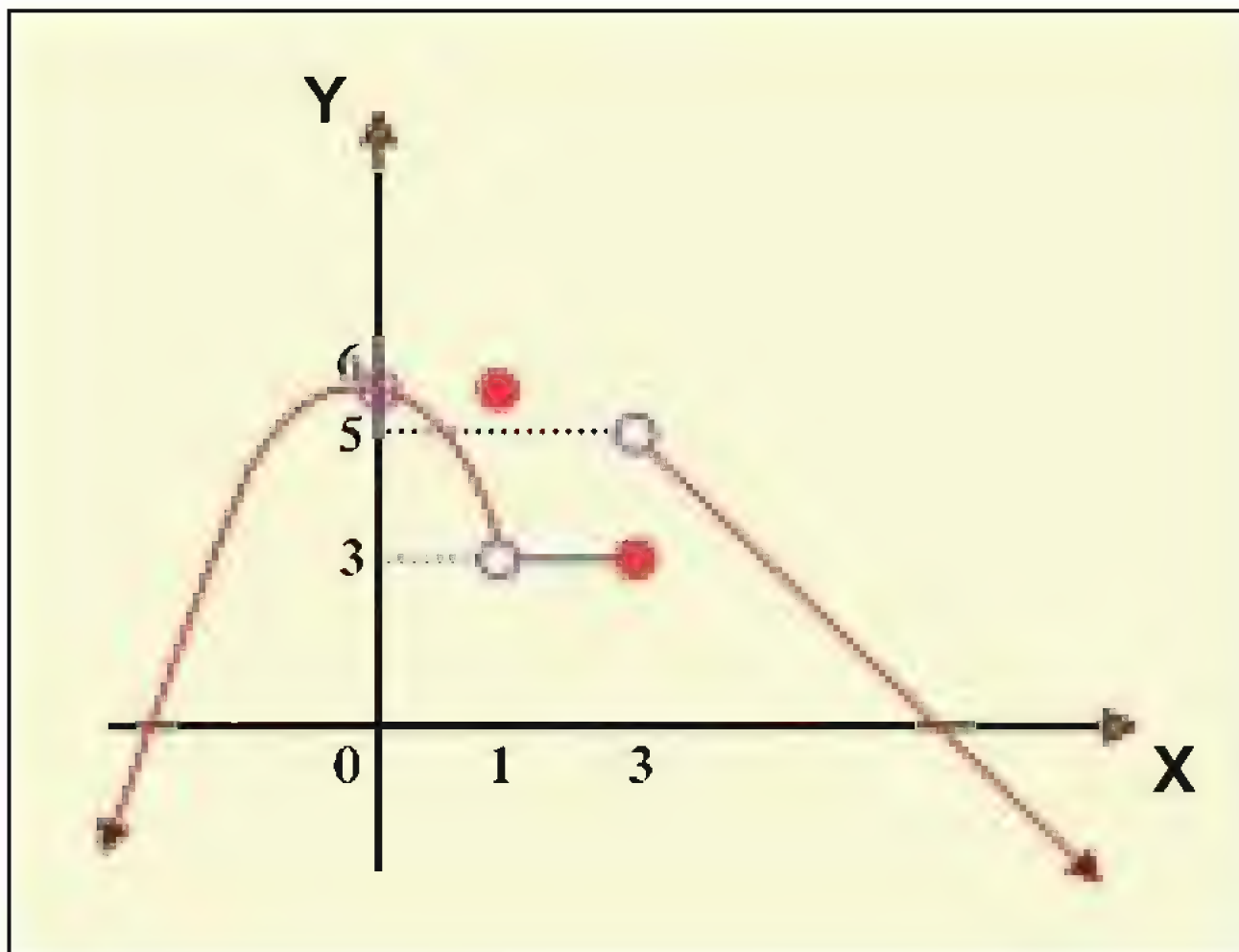
$\therefore$  الدالة مستمرة عند  $x = b$  لكن  $b$  تمثل كل عنصر من عناصر المجال

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ مستمرة } f(x)$$

$\therefore f(x)$  مستمرة

### مثال 2

نلاحظ من الشكل المجاور:



1. الدالة غير معرفة عند  $x = 0$

$\Leftarrow$  الدالة غير مستمرة عند  $x = 0$

2.  $f(1) = 6$  ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

$\therefore$  الدالة غير مستمرة عند  $x = 1$

3.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

$\therefore$  الدالة غير مستمرة عند  $x = 3$



### [5-4-1] تعريف:

يقال للدالة  $f$  مستمرة عن يسار  $b$  اذا كانت معرفة عن يسار  $b$  , اذا حققت :

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

### [5-4-2] تعريف:

يقال للدالة  $f$  مستمرة عن يمين  $b$  اذا كانت معرفة عن يمين  $b$  , اذا حققت :

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$$

### [5-4-3] تعريف:

يقال للدالة  $f$  مستمرة على الفترة المغلقة  $[a, b]$  اذا حققت ما يأتي :

1. الدالة مستمرة على الفترة المفتوحة  $(a, b)$  .

2. الدالة مستمرة عن يمين  $a$  وعن يسار  $b$  .

### مثال 3

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 , & x \geq 2 \\ 8 - x , & x < 2 \end{cases}$$

اثبت ان الدالة مستمرة على  $\mathbb{R}$  .

1. نثبت ان الدالة مستمرة عند  $x = 2$

$$f(2) = (2)^2 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2) = 4 + 2 = 6 = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - x) = 8 - 2 = 6 = L_2 \end{cases}$$

$$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$\therefore f$  مستمرة عند  $x = 2$



$$\forall a > 2$$

2

$$f(a) = a^2 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 2) = a^2 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

∴ الدالة مستمرة عند  $x = a$

∴ الدالة مستمرة  $\forall x > 2$

$$\forall a < 2$$

3

$$f(a) = 8 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (8 - x) = 8 - a$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

∴ الدالة مستمرة عند  $x = a$

∴ الدالة مستمرة  $\forall x < 2$

الدالة مستمرة عند  $x = 2$  ، عند  $x > 2$  ، عند  $x < 2$

∴ الدالة مستمرة في  $\mathbb{R}$

مثال 4: اثبت ان الدالة  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  مستمرة على الفترة المغلقة  $[-1, 1]$ .

الحل :

(1) واضح أن الدالة  $f$  مستمرة على الفترة المفتوحة  $(-1, 1)$  وذلك لأنها مستمرة في كل نقطة من نقاط هذه الفترة .

فمثلاً لو اخذنا  $x = 0$  فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1 - x^2} = 1 = f(0)$$

(2) الدالة  $f$  مستمرة عن يسار النقطة  $x = 1$  وذلك لأن

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1)$$

(3) الدالة  $f$  مستمرة عن يمين النقطة  $x = -1$  وذلك لأن :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$

اذن تكون الدالة  $f$  مستمرة على الفترة المغلقة  $[-1, 1]$  .

تمارين (5-2)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & , x \geq 1 \\ 4x + 1 & , x < 1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند  $x = -1$  ,  $x = 1$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند  $x = 2$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |2x - 6|$$

ابحث استمرارية الدالة على  $\mathbb{R}$ .

إذا كان

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & , x < \sqrt{2} \\ x^2 + 1 & , x > \sqrt{2} \\ 4 & , x = \sqrt{2} \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند  $x = \sqrt{2}$  ,  $x = -1$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

لتكن

ابحث استمرارية الدالة عند  $x = 1$  ,  $x = -3$  ,  $x = 3$

إذا كانت الدالة مستمرة عند  $x = 1$  ,  $f(-1) = 5$  جد قيمة  $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2a + x^2 & , x \geq 1 \\ 2x + b & , x < 1 \end{cases}$$



## Chapter 6

### المشتقات The Derivative

\* نبذة تاريخية

\* [6-1] التفسير الهندسي للمشتقة .

\* [6-2] تطبيقات فيزيائية على المشتقة .

\* [6-3] قواعد المشتقة .

\* [6-4] قاعدة السلسلة .

\* [6-5] معادلة المماس للمنحني والعمود على المماس .

\* [6-6] الاشتقاق الضمني .

\* [6-7] مشتقات الدوال الدائرية .

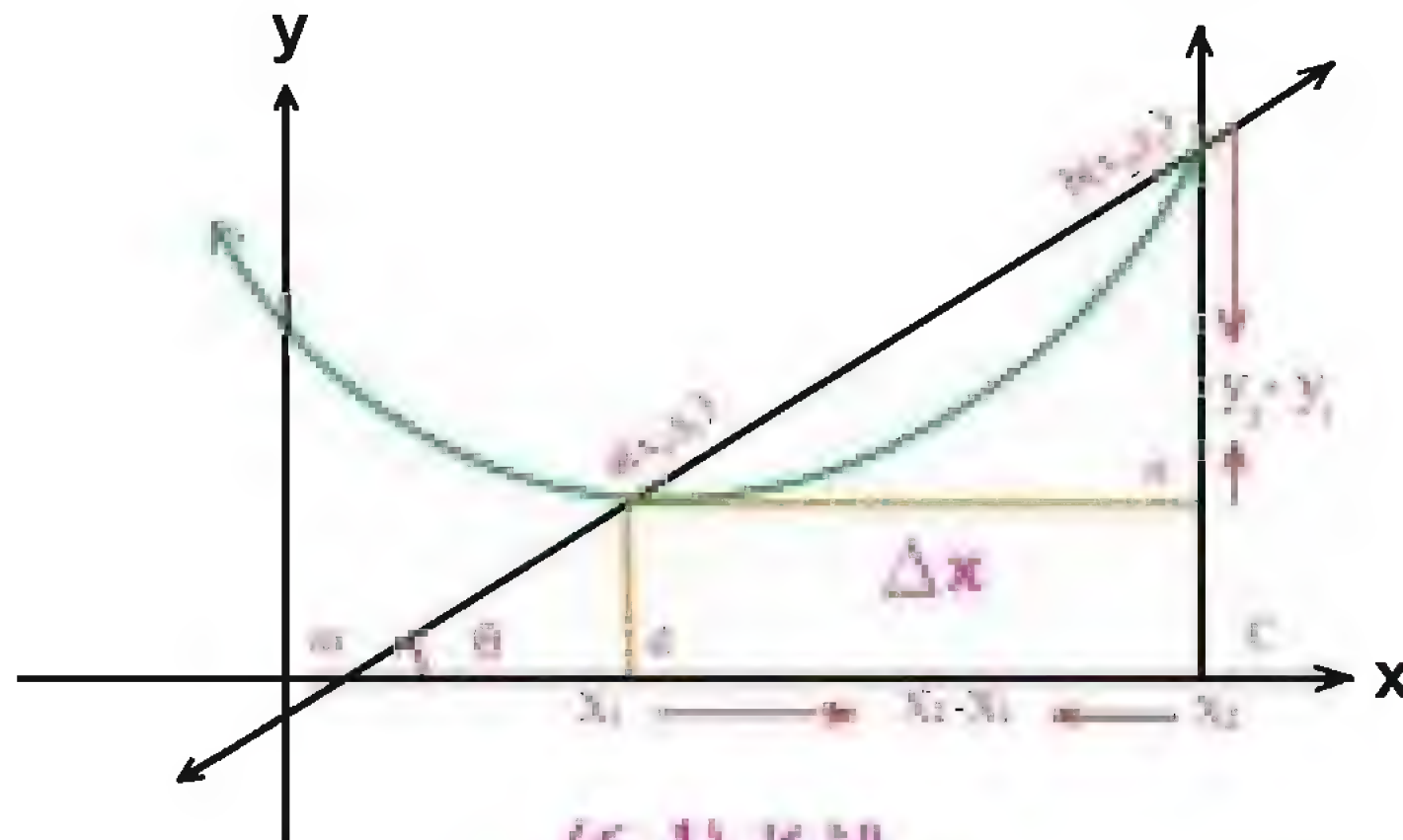
المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
مشتقة الدالة $f(x)$	$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
السرعة	$V(t) = \frac{ds}{dt}$
التعجيل	$g(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$
قاعدة السلسلة	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \cdot \frac{dn}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$
تركيب الدالتين $f(x)$ , $g(x)$	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

## المشتقات The Derivative

### نبذة تاريخية :

إن أهم الاكتشافات الرياضية في القرن السابع عشر هي اكتشاف حساب التفاضل والتكامل من قبل اسحق نيوتن وكوتفريد وليم ليبنتز الذي بهذا الاكتشاف وصلت الرياضيات الى مستوى متقدم ، ويكون عندها انتهاء تاريخ الرياضيات الاولى بصورة رئيسة. وقد ظهرت في البداية فكرة التكامل وذلك مع ايجاد مساحات مناطق وحجوم اجسام واطوال اقواس معينة ، ثم وجد التفاضل بعد فترة من علاقات المسائل على مماسات لمنحنيات، ومع اسئلة حول القيم العظمى والصغرى للدوال. وقد لوحظ اخيراً بان هناك علاقة بين التكامل والتفاضل وانهما عمليتان عكسيتان.

وسنتناول في هذا الفصل مفهوم "الاشتقاق" من مسألتين شغلنا اهتمام الرياضيين الاوائل في القرن السابع عشر ومنهم العالم الالماني ليبنتز الذي نشر بحثاً وذلك في سنة 1684 للميلاد ، تطرق فيه الى مفهوم مشتقة الدالة، وقد عرفها بميل المستقيم ( غير الموازي للمحور الشاقولي ) اي ان المسألة الأولى التي سنتناولها تتعلق بالمماس للمنحني عند نقطة عليه. والمسألة الثانية فهي فيزيائية تتعلق بحركة جسم في خط مستقيم.



الشكل (1-6)

### [ 6-1 ] التفسير الهندسي للمشتقة

لتكن  $a(x_1, y_1)$  .  $b(x_2, y_2)$  من نقط الدالة  $f$

ليكن  $\overleftrightarrow{ab}$  قاطعاً لمنحني الدالة في  $(a)$  و  $(b)$

$\overleftrightarrow{ab}$  يصنع زاوية قياسها  $\theta$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات



$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \overleftrightarrow{ab} \text{ ميل} = \tan \theta$$

في  $\Delta abn$  القائم في  $n$

$$cd = an$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = an$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = bn$$

$$m \nless abn = m \nless bmc$$

$$y_2 = f(x_2) \quad , \quad y_1 = f(x_1)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

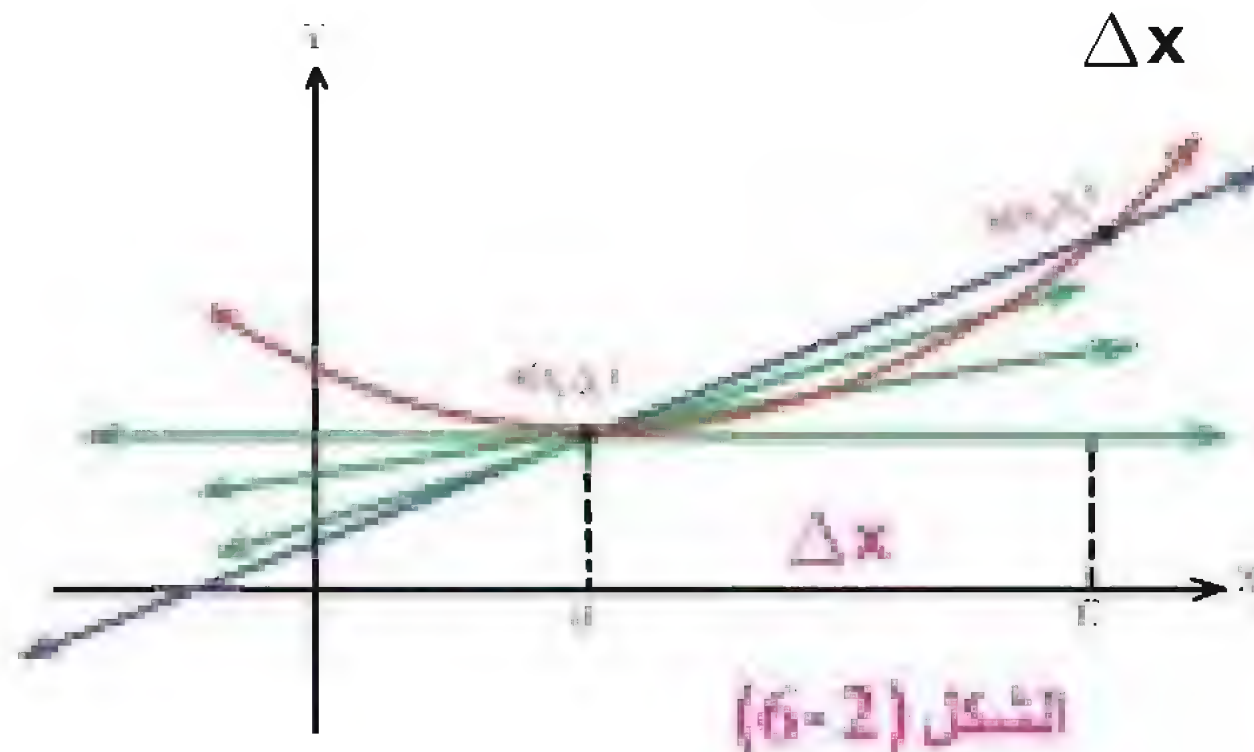
$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$\tan \theta = \overleftrightarrow{ab} \text{ ميل} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

إذا تصورنا بأن نقطة  $b$  (أخذت بالاقتراب) قريباً كافياً من النقطة  $a$  لوجدنا  $\Delta x$  اخذت تتقارب من عدد صغير جداً جداً حتى كادت ان تكون  $b$  هي  $a$  فإن  $\Delta x \rightarrow 0$

فيقال لمثل هذه الحالة بانها الغاية للدالة  $\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$  عندما  $\Delta x \rightarrow 0$

أو بتعبير رياضي :  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$



ان هذه الغاية إن وجدت فهي تمثل المشتقة عند النقطة  $(x_1, y_1)$  وهي تساوي ميل المماس عند النقطة ويعبر عنها باحدى التعابير الاتية :

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

يصح لنا القول ان المشتقة عند نقطة التماس تساوي ميل (Slope) المماس عندها .

ملاحظة :

التماس في المنحنيات يختلف عن مفهوم التماس في الدوائر. كما في الشكل (3-6)



الشكل (3-6)

مثال 1

إذا كان

$$f(x) = x^2 + 5x + 3$$

جد  $f'(2)$  مستخدماً التعريف

الحل :

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 + 5(2 + \Delta x) + 3 - 17}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 10 + 5\Delta x - 14}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$



$$\therefore f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (9 + \Delta x)}{\Delta x} = 9$$

مثال 2

$$f(x) = \sqrt{x + 3} \quad x \geq -3$$

جد :  $f'(1)$  باستخدام التعريف .

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta x + 3} - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - 2}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{4 + \Delta x} + 2}{\sqrt{4 + \Delta x} + 2}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + \Delta x - 4}{\Delta x (\sqrt{4 + \Delta x} + 2)}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

مثال 3

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad x \neq 0 \quad \text{جد } f'(x) \text{ باستخدام التعريف .}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x+\Delta x} - \frac{3}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

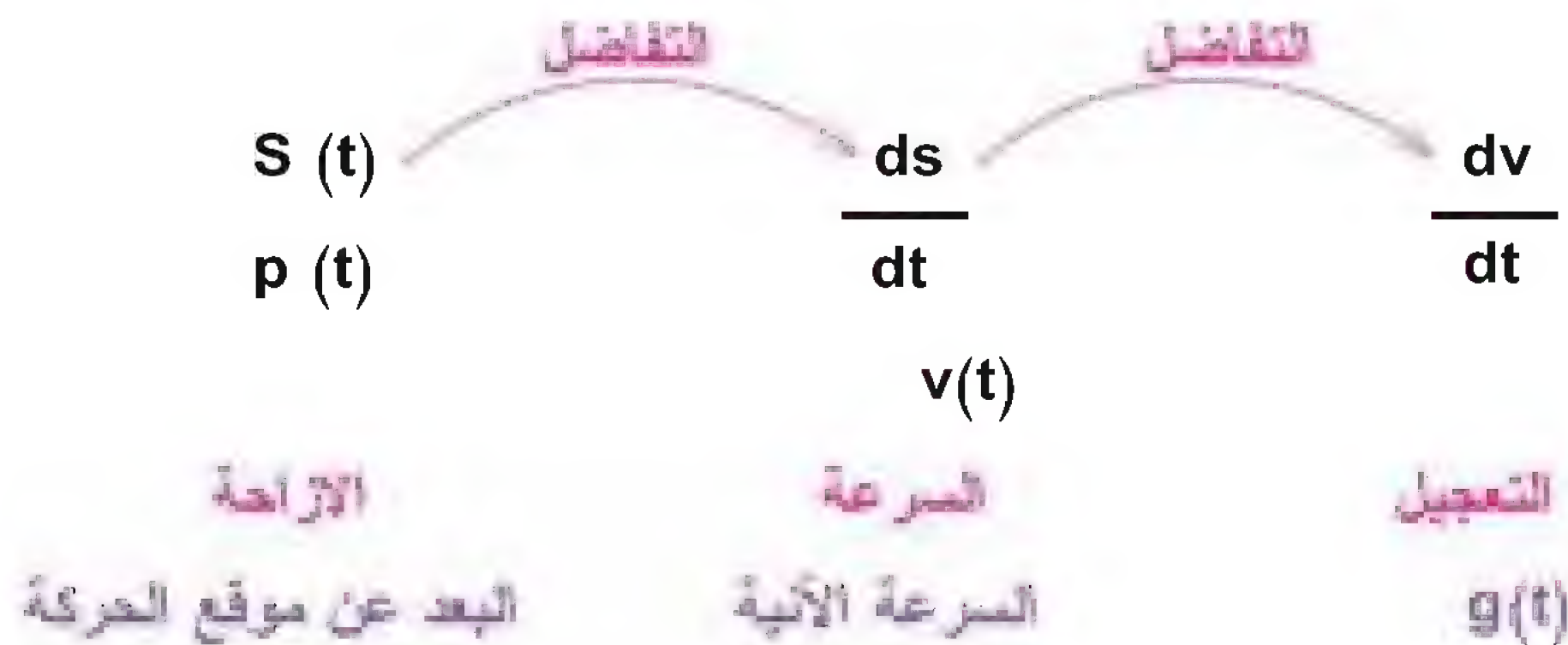
$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{3x - 3x - 3\Delta x}{x(x+\Delta x)} \times \frac{1}{\Delta x} \right) = \frac{-3}{x(x+0)} = \frac{-3}{x^2}$$

## [6-2] تطبيقات فيزيائية على المشتقة

$S(t) = P(t)$  = البعد عن موقع بداية الحركة = الإزاحة (Displacement)

$V(t) = (\text{Velocity})$  السرعة

$g(t) = (\text{Acceleration})$  التعجيل



∴ مشتقة الإزاحة = السرعة

مشتقة السرعة = التعجيل



### مثال 1

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة

$$S = p(t) = 3t^2 + 5t + 8$$

حيث  $p(t)$  الازاحة بالامتار والزمن  $t$  بالثواني ، جد سرعة الجسم الانية باستخدام التعريف .

$$V(t) = p'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(t + \Delta t)^2 + 5(t + \Delta t) + 8 - (3t^2 + 5t + 8)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 + 5t + 5\Delta t + 8 - 3t^2 - 5t - 8}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t (6t + 3\Delta t + 5)}{\Delta t} = 6t + 5 \quad \text{السرعة الانية م/ثا}$$

### مثال 2

لتكن  $v(t)$  سرعة جسم بالامتار على الثواني حيث :  $v(t) = 3t^2 - 12t + 50$

جد : 1 سرعة الجسم في نهاية 3 ثواني الاولى من بدأ الحركة .

2 جد السرعة عندما التعجيل = صفر

الحل :

$$v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 50$$

$$= 27 - 36 + 50$$

$$= 41 \quad \text{السرعة في نهاية 3 ثواني الاولى م / ثا}$$

$$\begin{aligned}
 v'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(t + \Delta t)^2 - 12(t + \Delta t) + 50 - (3t^2 - 12t + 50)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{6t \Delta t + 3(\Delta t)^2 - 12 \Delta t}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (6t + 3 \Delta t - 12) \\
 &= 6t - 12 = 0
 \end{aligned}$$

$$t = 2 \text{ ثا}$$

$$\begin{aligned}
 v(2) &= 3(2)^2 - 12(2) + 50 \\
 &= 12 - 24 + 50 \\
 &= 38 \text{ م/ثا} \quad \text{السرعة عندما التعجيل = صفر}
 \end{aligned}$$

### ملاحظة :

يقال للدالة  $f(x)$  قابلة للاشتقاق (Differentiable Function) عند  $x_1$  اذا امكن ايجاد  $f'(x_1)$  ويمكن القول اذا وجد مماس وحيد للمنحني عند  $x = x_1$  تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند  $x = x_1$ . وتكون الدالة قابلة للاشتقاق اذا كانت قابلة للاشتقاق من جميع عناصر مجالها.

يمكن ان يصاغ التعريف : الدالة  $f(x)$  قابلة للاشتقاق عند النقطة

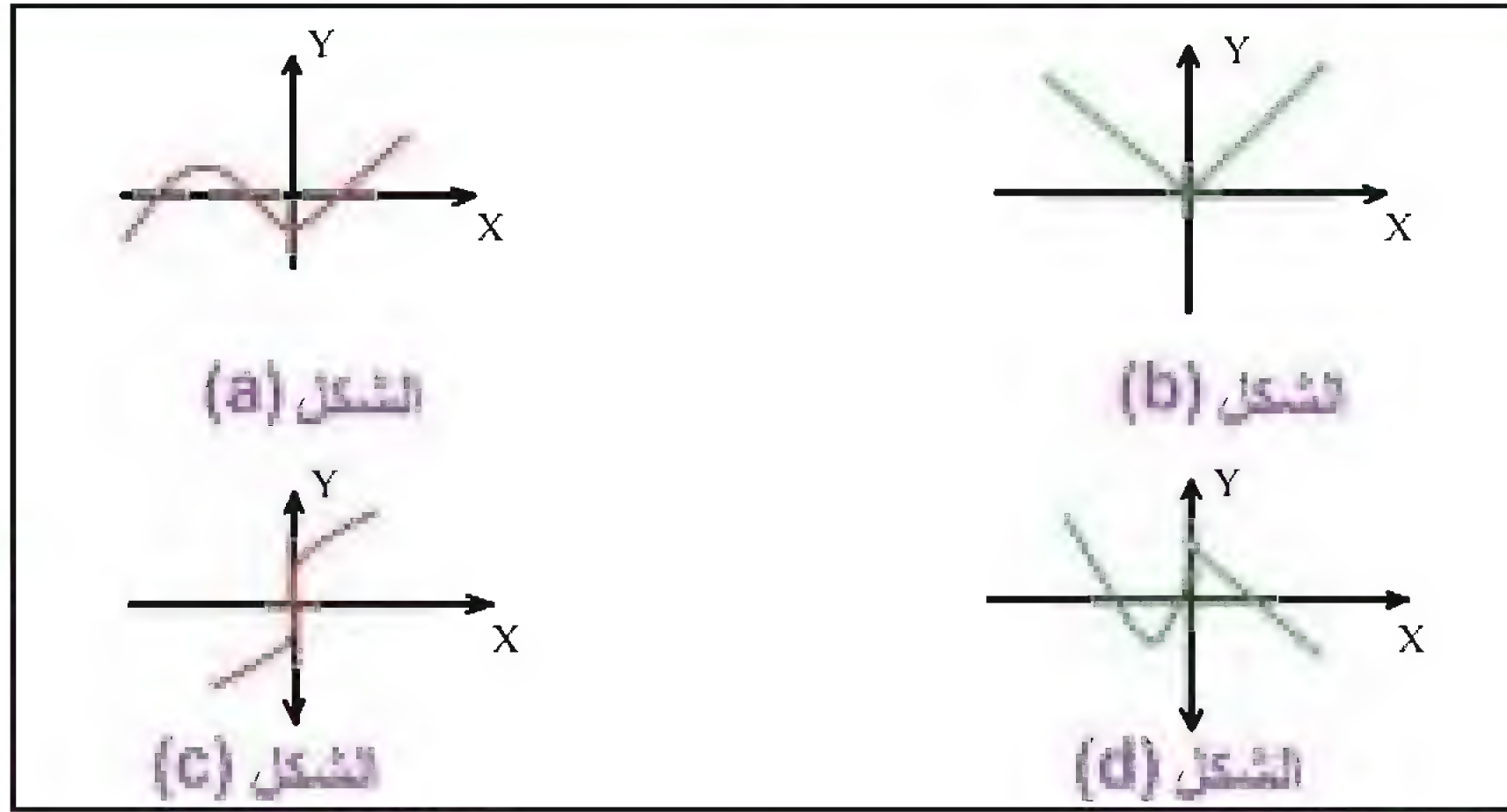
الدالة  $f(x)$  قابلة للاشتقاق عند النقطة  $x_1 \in (a, b)$  اذا تحقق الشرطان الاتيان :

(1) الدالة مستمرة في  $[a, b]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (2) \text{ النهاية موجودة}$$

يمكن معرفة قابلية الاشتقاق من التمثيل البياني لبيان الدالة وكما في الاشكال الاتية :





الشكل (4-6)

في الاشكال الاربعة اعلاه:

**شكل (a):** الدالة قابلة للاشتقاق لانها مستمرة ولا تحوي حافات حادة واي مماس يرسم للمنحني في اية نقطة لا يوازي محور الصادات .

**شكل (b):** الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لوجود حافة حادة.

**شكل (c):** الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لان المماس عند  $x = 0$  رغم انه وحيد لكنه يوازي محور الصادات فلا ميل له .

**شكل (d):** الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لانها غير مستمرة عند  $x = 0$  .

### مثال 1

لتكن

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

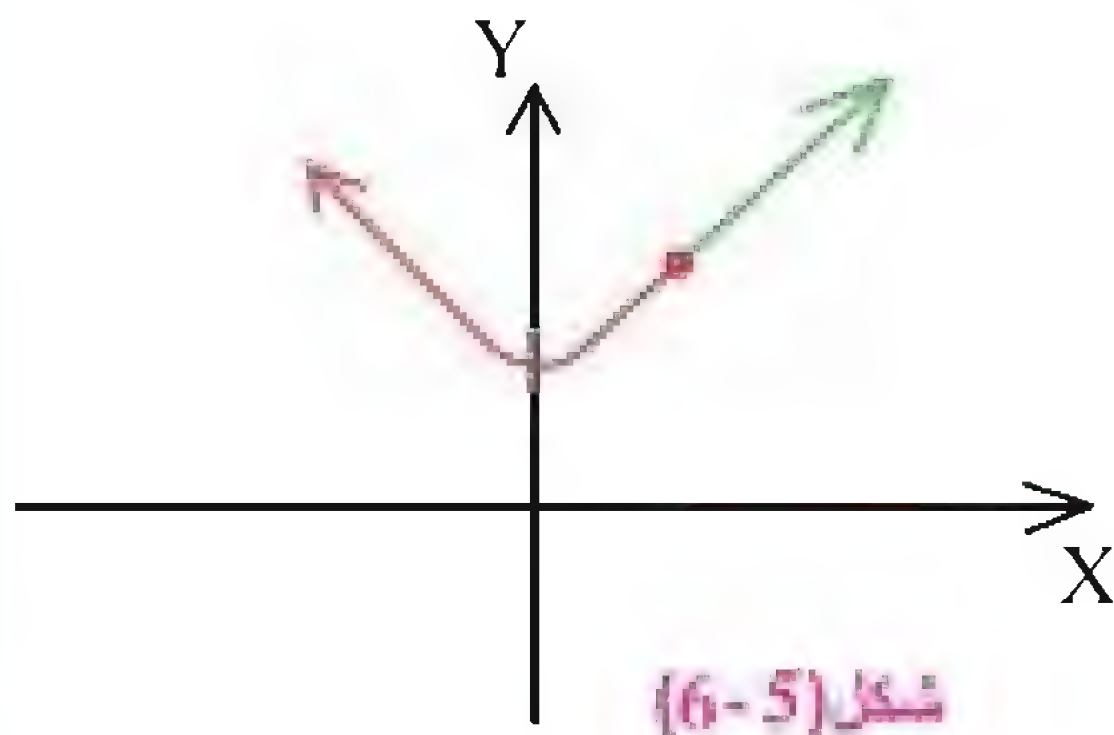
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{اذا كانت } x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{اذا كانت } x > 1 \end{cases}$$

1 ارسم المخطط البياني للدالة  $f$  ، اثبت انها مستمرة عند  $x = 1$

2 هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق بين ذلك ؟

الحل :

$$x \leq 1 \quad y = f(x) = x^2 + 3$$



شكل (5-6)

x	y
1	4
0	3
-1	4

$$y = 2x+2 \quad x > 1$$

	x	y
فجوة	1	4
	2	6

برهنة f مستمرة عند (1)

$$f(1) = 1^2+3=4$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+3) = 4 = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (2x+2) = 4 = L_2 \end{array} \right.$$

$$\therefore L_1 = L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \quad \text{موجودة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \therefore$$

$\therefore f$  مستمرة عند  $x = 1$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

a. عندما  $x \rightarrow +1$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \Delta x) + 2 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 + 2 \Delta x - 2}{\Delta x} = 2 = L_1$$



b. عندما  $x \rightarrow -1$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 + 3 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 = L_2$$

$$L_1 = L_2$$

$\therefore f$  قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$

c. عندما  $x < 1$

$$\forall a < 1$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta x)^2 + 3 - (a^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - a^2 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (2a + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = 2a$$

$f$  قابلة للاشتقاق عند  $x=a$

$f$  قابلة للاشتقاق ،  $\forall x < 1$

عندما  $x > 1$  ،  $\forall a > 1$

$$f(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(a + \Delta x) + 2 - (2a + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2a + 2\Delta x + 2 - 2a - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = 2$$

الدالة قابلة للاشتقاق عند  $x = a$

الدالة قابلة للاشتقاق  $\forall x > 1$  ( الدالة قابلة للاشتقاق  $\forall x > 1$  )

برهان  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$  ،  $\forall x > 1$  ،  $\forall x < 1$

$\therefore f$  قابلة للاشتقاق .

مثال 2

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{إذا كانت } x \geq 2 \\ 4x - 1 & \text{إذا كانت } x < 2 \end{cases}$$

1 هل الدالة قابلة للاشتقاق عند  $x = 2$

2 هل الدالة مستمرة عند  $x = 2$  ؟



الحل :

1

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

a.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 + 3 - (4 + 3)}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 7}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4 = L_1$$

b.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4(2 + \Delta x) - 1 - 7}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8 + 4\Delta x - 8}{\Delta x} = 4 = L_2$$

$$\therefore L_1 = L_2$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند  $x = 2$

∴ الدالة مستمرة عند  $x = 2$  ( إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة فإنها مستمرة في تلك النقطة )

لكن العكس غير صحيح كما في المثال الآتي :

### مثال 3

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x - 3|$$

1 برهن على ان الدالة مستمرة عند  $x = 3$

2 هل الدالة قابلة للاشتقاق عند  $x = 3$  ؟

الحل :

1

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & , \quad x \geq 3 \\ 3 - x & , \quad x < 3 \end{cases}$$

$$f(3) = 3 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0 = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) = 3 - 3 = 0 = L_2 \end{cases}$$

$$\therefore L_1 = L_2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \quad \text{موجودة}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$\therefore$  الدالة مستمرة عند  $x = 3$

2

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$\text{a. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 + \Delta x - 3 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = L_1$$



$$\text{b. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 - (3 + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 = L_2$$

$$\therefore L_1 \neq L_2$$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند  $x=3$

من المثالين السابقين يمكن استنتاج المبرهنة الآتية والتي سنقبلها بدون برهان .

مبرهنة :

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند  $x = a$  ، فإن الدالة مستمرة عند  $x = a$

الرموز المستخدمة في المشتقة :

لتكن  $Y = f(x)$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (f(x)) = \text{المشتقة الاولى}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{ميل المماس}$$

لمنحني الدالة عند أي نقطة  $(x, y)$  من نقطه .

1. لتكن  $f(x)=c$  ،  $c \in \mathbb{R}$  دالة ثابتة .

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{فإن } f'(x)=0 \quad \text{أي أن}$$

مثال 1

جد  $f'(x)$

$$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = 0$$

2. لتكن  $f(x)=x^n$

حيث  $n \in \mathbb{R}$  ،  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

مثال 2

جد  $f'(x)$

1.  $f(x)=x^6$

$$\therefore f'(x)=6x^5$$

2.  $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

3.  $g(n)=\sqrt[3]{n}$

$$g(n)=n^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore g'(n)=\frac{1}{3} n^{-\frac{2}{3}}$$



إذا كانت كل من  $h$  ,  $g$  ,  $f$  دوال قابلة للاشتقاق عند  $x$  وكذلك  $c \in \mathbb{R}$

3.

$$f(x) = cg(x)$$

$$f'(x) = cg'(x)$$

4.

$$f(x) = g(x) \pm h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

مثال 3 جد  $h'(x)$  ,  $g'(x)$

$$1. \quad g(x) = \frac{3}{2x^2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$g(x) = \frac{3}{2} x^{-2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$g'(x) = -3x^{-3} + \frac{10x}{3} - \frac{7}{5}$$

$$2. \quad h(x) = 10 \left( \frac{x^2}{50} + \frac{x}{9} - \frac{1}{3} \right)$$

$$h'(x) = 10 \left( \frac{2x}{50} + \frac{1}{9} \right)$$

$$= 10 \left( \frac{x}{25} + \frac{1}{9} \right)$$

5.

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$f'(x) = g(x) h'(x) + h(x) g'(x)$$

مشتقة حاصل ضرب = الدالة الاولى  $\times$  مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية  $\times$  مشتقة الدالة الاولى  
دالتين



#### مثال 4

$$f(x) = (3-2x-x^5)(2x^7+5)$$

$$f'(x) = (3-2x-x^5)(14x^6) + (2x^7+5)(-2-5x^4)$$

6.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad h(x) \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين =  $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

#### مثال 5

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+5}$$

جد  $f'(x)$

التبسيط يترك للطالب

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(2x+3) - (x^2+3x+1)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

ملاحظة :

$$\frac{d}{dx} (f'(x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

إذا كانت هذه الغاية موجودة تسمى المشتقة الثانية للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $x$  ويرمز لها بالرمز:

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (f(x))$$

وبالطريقة نفسها تعرف المشتقة الثالثة والرابعة .....



7.

$$g(x) = u^n$$

إذا كان

$$g'(x) = \frac{dg}{dx}$$

فإن

$$\frac{d}{dx} (u)^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

أي

مثال 6

إذا كان  $y = (1-x)^3$  جد  $y'$  ,  $y''$  عند  $x = 2$

الحل :

$$y = (1-x)^3$$

$$y' = 3(1-x)^2 (-1)$$

$$y' = -3(1-x)^2$$

$$x=2 \quad \text{عند}$$

$$\therefore y' = -3(1-2)^2 = -3$$

$$y'' = -6(1-x)(-1)$$

$$y'' = 6(1-x)$$

$$x=2 \quad \text{عندما}$$

$$y'' = 6(1-2) = -6$$

## تمارين (1 - 6)

1.  $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$  باستخدام التعريف جد  $f'(1)$   
 $g(x) = \sqrt{x}$  جد اوسع مجال الى الدالة ومشتقتها .

2.  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  حيث  $x \neq 1$  جد باستخدام التعريف  $f'(2)$

3. ابحث استمرارية وقابلية الاشتقاق لكل من الدوال التالية عند قيم  $x$  التي أمامها :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{إذا كان } x \leq 2 \\ 7-x & \text{إذا كان } x > 2 \end{cases}$$

عند  $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{إذا كان } x \geq -1 \\ -2x-1 & \text{إذا كان } x < -1 \end{cases}$$

عند  $x = -1$

4. جد  $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+5 & \text{إذا كان } x \geq 1 \\ ax+b & \text{إذا كان } x < 1 \end{cases}$$

إذا كانت قابلة للاشتقاق عند  $x=1$



4

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |2x - 6|$$

هل الدالة قابلة للاشتقاق عند  $x=3$ .

5

باستخدام قواعد المشتقة جد المشتقة الاولى لكل مما يأتي ازاء العدد المؤشر امامها :-

$$1. f(x) = 3x^2 + 5x + 8$$

عند  $x=1$

$$2. f(x) = x \sqrt{x^2 + 3}$$

عند  $x=-1$

$$3. f(x) = \left( \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} \right)^4$$

عند  $x=0$

$$4. f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - x)^2}$$

عند  $x = -1$

6

$$y = \sqrt[3]{3x + 5} \quad \text{جد } y', y'' \text{ عند } x = 1.$$

## Chain Rule

[6-4] قاعدة السلسلة

1.

$y = f(n)$   $f$  قابلة للاشتقاق عند  $n$

$n = g(x)$   $g$  قابلة للاشتقاق عند  $x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

مثال 1

إذا كان كل من  $y = 3n^2 + 5$  و  $n = 4x + 3$

جد :  $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 6n$$

$$\frac{dn}{dx} = 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

$$= 6n (4)$$

$$= 24n$$

$$\because n = 4x + 3$$

$$\therefore = 24 (4x + 3)$$

$$= 96x + 72$$

حل آخر : نعوض عن قيمة  $n$  في  $y = 3n^2 + 5$

$$\Rightarrow y = 3 (4x + 3)^2 + 5$$



$$\therefore \dot{y} = 6(4x+3)(4)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 24(4x+3) \\ = 96x+72$$

2.

$y = f(n)$   $f$  قابلة للاشتقاق عند  $n$

$x = g(n)$   $g$  قابلة للاشتقاق عند  $n$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

مثال 2

إذا كان

$$x = 3n - 4$$

$$y = 2n + 5$$

$$\frac{dy}{dx}$$

جد

الحل :

$$\frac{dx}{dn} = 3$$

$$\frac{dy}{dn} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn} \\ = \frac{2}{3}$$

### مثال 3

إذا كان

$$y = 5n + 4$$

$$x = 3n + 1$$

جد  $\frac{dy}{dx}$  عندما  $n=1$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 5$$

$$\frac{dx}{dn} = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

عندما  $n = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}$$



#### مثال 4

إذا كان  $y = n^2 + 3n + 2$

$$n = 2x + 1$$

جد  $\frac{dy}{dx}$  عندما  $x = 2$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 2n + 3$$

$$\frac{dn}{dx} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

$$= (2n + 3) (2)$$

$$= 4n + 6$$

$$\therefore n = 2x + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(2x + 1) + 6$$

$$= 8x + 4 + 6$$

$$= 8x + 10$$

عند  $x = 2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 16 + 10 = 26$$

3.

إذا كان  $f(x)$  ،  $g(x)$  كلاهما قابلة للإشتقاق عند  $x$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

فإن :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

وإن :

### [5-6] معادلة المماس للمنحني والعمود على المماس

نعوض قيمة  $x_1$  في الدالة نحصل على  $y_1$  { لان  $y = f(x)$  } النقطة  $(x_1, y_1)$  نعوض  $x_1$  في المشتقة الاولى نحصل على ميل المماس عند تلك النقطة .

مثال 1

جد معادلة المماس للمنحني  $f(x) = (3-x^2)^4$  عند  $x = 2$

الحل :

$$f(2) = (3-4)^4 = 1$$

النقطة  $(2, 1)$

$$f'(x) = 4(3-x^2)^3(-2x)$$

$$f'(2) = 4(3-4)^3(-4)$$

$$= 4(-1)^3(-4) = 16 \quad \text{ميل المماس}$$

نطبق القاعدة :

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$16 = \frac{y - 1}{x - 2}$$

$$16x - 32 = y - 1$$

$$16x - y - 32 + 1 = 0$$

$$16x - y - 31 = 0$$



## مثال 2

جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني  $f(x) = (2x-1)^5$  عند  $x = 1$

الحل :

$$f(1) = (2-1)^5 = 1$$

$$\therefore (1, 1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(2x-1)^4 \quad (2) \\ &= 10(2x-1)^4 \end{aligned}$$

نقطة التماس

ميل المماس في أي نقطة

$$f'(1) = 10(2-1)^4 = 10$$

ميل المماس في نقطة التماس

$$10 = \frac{y-1}{x-1}$$

$$10x - 10 = y - 1$$

$$10x - y - 9 = 0$$

معادلة المماس

$$\begin{aligned} \frac{-1}{10} &= \text{ميل العمود} \\ \frac{-1}{10} &= \frac{y-1}{x-1} \end{aligned}$$

$$\left( \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \text{ميل العمود} \right)$$

$$\Rightarrow 10y - 10 = -x + 1$$

$$x + 10y - 10 = 1$$

$$10y + x - 11 = 0 \quad \text{معادلة العمود}$$

جد معادلة المماس لمنحني الدالة  $y = (f \circ g)(x)$  عند  $x=1$  إذا كان

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g(x) = 3x + 5$$

الحل :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

$$= \sqrt[3]{3x + 5}$$

$$\therefore y = \sqrt[3]{3x + 5}$$

عندما  $x=1$

$$y = \sqrt[3]{3+5} = 2 \Rightarrow (1, 2) \text{ نقطة التماس}$$

$$(f \circ g)(x) = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{3} (3x+5)^{-\frac{2}{3}} \times 3$$

$$(f \circ g)'(1) = \frac{1}{3} (2^3)^{-\frac{2}{3}} \times 3$$

$$= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{ميل لمماس في نقطة التماس}$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{y - 2}{x - 1}$$

$$\Rightarrow x - 1 = 4y - 8$$

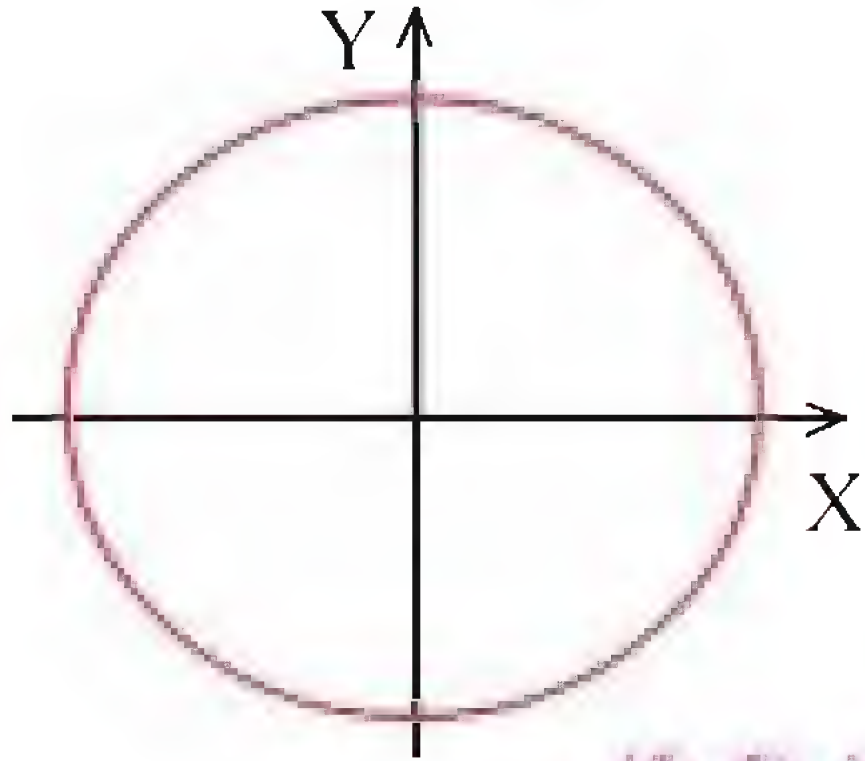
$$x - 4y + 7 = 0 \quad \text{معادلة المماس}$$



## Implicit Differentiation

### [6-6] الاشتقاق الضمني

حين تكون  $y$  دالة معطاة في  $x$  أي  $y = f(x)$  ، فيقال ان الدالة صريحة ويسمى  $x$  بالمتغير المستقل بينما  $y$  بالمتغير التابع .



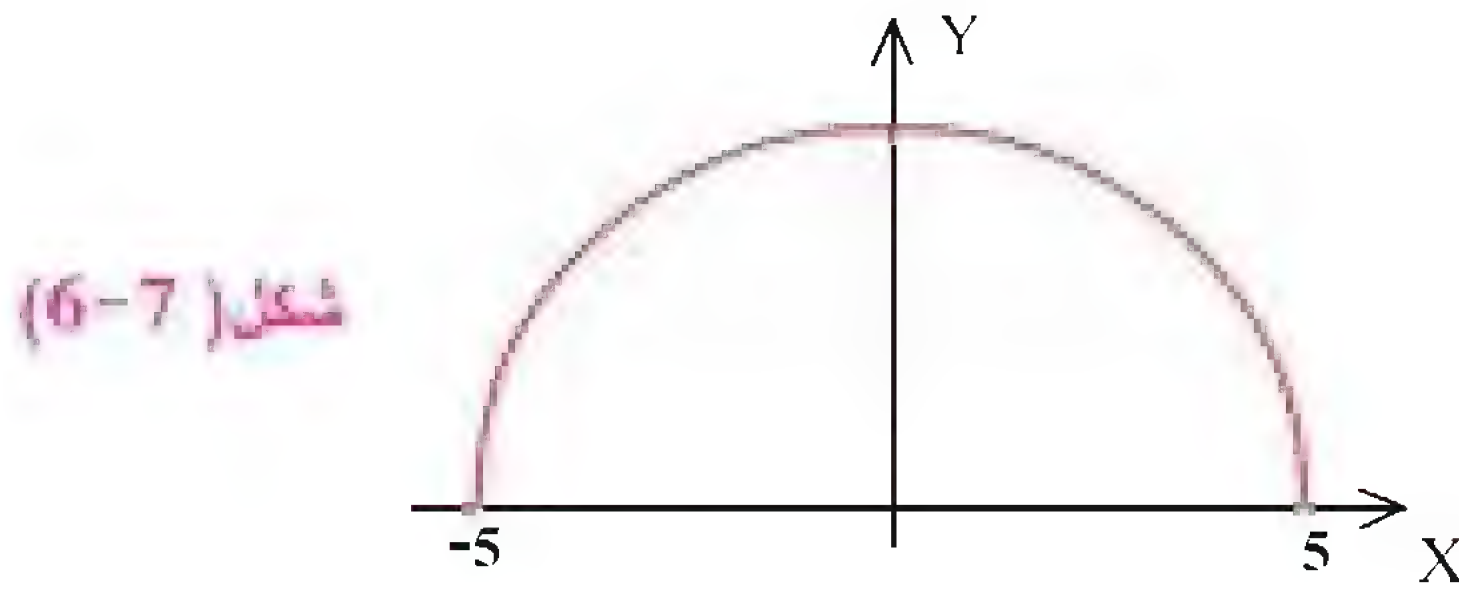
شكل (6-6)

$x^2 + y^2 = 25$  معادلة دائرة وهي ليست دالة .

$$\text{لكن } y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

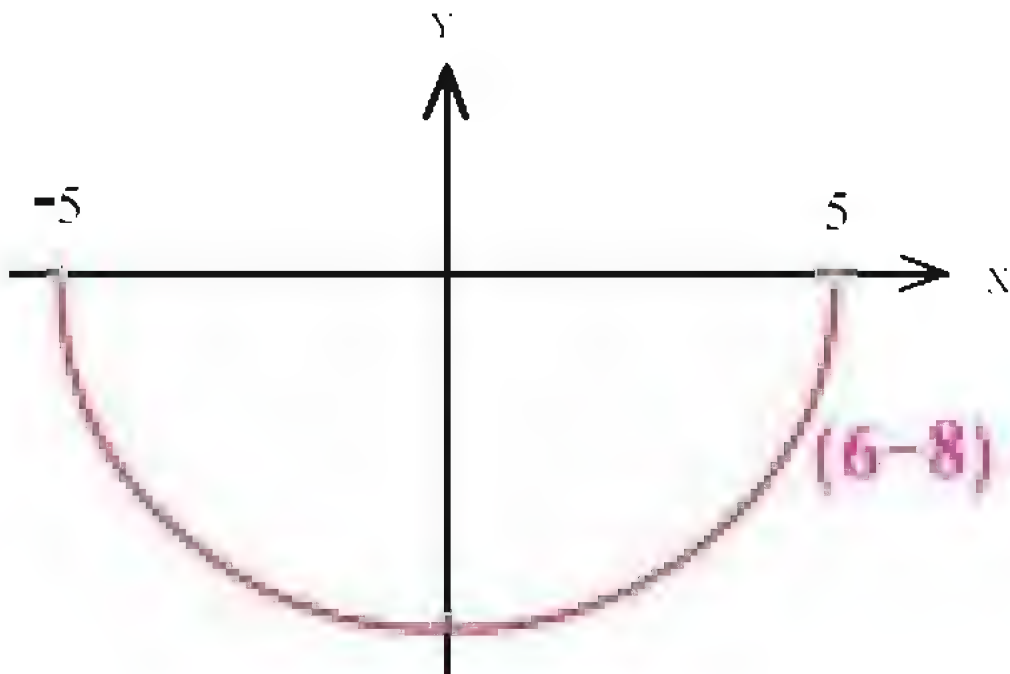
فلو رسمنا  $y = \sqrt{25 - x^2}$  لوجدنا انه يمثل نصف الدائرة الاعلى كما في الشكل (6-7):



شكل (6-7)

وكذلك  $y = -\sqrt{25 - x^2}$  وهي تمثل نصف الدائرة الاسفل الشكل (6-8):

ولكل من العلاقتين :



شكل (6-8)

$$y = -\sqrt{25 - x^2} \quad . \quad y = \sqrt{25 - x^2}$$

يمثلان دالة مجالها  $[-5, 5]$

أي أننا عرفنا دالتين ضمن العلاقة  $x^2 + y^2 = 25$  والتي كما اسلفنا لا تمثل دالة يقال لكل من

$$y = -\sqrt{25 - x^2} \quad . \quad y = \sqrt{25 - x^2}$$

دالة ضمنية.

ولإيجاد مشتقة العلاقة : لتكن  $y = f(x)$

$$x^2 + (f(x))^2 = 25$$

$$2x + 2(f(x)) f'(x) = 0$$

$$\therefore f(x) = y, f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

مثال 1

إذا كان  $x^2 - y^2 = 7y - x$  جد

$$\frac{dy}{dx}$$

الحل :

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 7 \frac{dy}{dx} - 1$$

$$2x + 1 = 7 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx}$$

$$2x + 1 = \frac{dy}{dx} (7 + 2y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{7 + 2y}$$



## مثال 2

جد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها  $x^2 + y^2 = 25$  عند النقطة  $(-3, 4)$

الحل :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y-4}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$3x + 9 = 4y - 16$$

$$3x - 4y + 25 = 0$$

## مثال 3

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0 \quad \text{إذا كان } x^2 + y^2 = 10 \text{ اثبت ان :}$$

الحل :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y \frac{d^2y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \Rightarrow \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0 \quad (\text{و.ه.م})$$

#### مثال 4

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة  $P(t) = \frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + 3t + 5$  حيث  $p(t)$  الازاحة بالامتار، الزمن بالثواني ، جد السرعة عندما التعجيل = صفر

$$p'(t) = \frac{1}{3} (3) t^2 - 4t + 3 \quad \text{السرعة}$$

$$p''(t) = 2t - 4 \quad \text{التعجيل}$$

$$2t - 4 = 0$$

$$t - 2 = 0$$

$$t = 2$$

$$p'(2) = 4 - 8 + 3 = -1 \quad \text{، السرعة عندما التعجيل = صفر}$$

#### مثال 5

لتكن  $v(t)$  سم اثا سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم  $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$

1. جد السرعة عندما  $t=2$  ثا .

2. جد السرعة عندما التعجيل = صفر .

الحل :

$$1. v(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 9$$

$$= 12 - 12 + 9 = 9 \quad \text{سم/ثا}$$

$$2. v'(t) = 6t - 6 \quad \text{التعجيل}$$

$$6t - 6 = 0$$

$$6t = 6$$

$$t = 1$$

$$v(1) = 3 - 6 + 9 = 6 \quad \text{السرعة عندما التعجيل = صفر سم/ثا}$$



تمارين (2-6)

1 إذا كان :  $g(x) = (1+2x^2+5x)^{3/2}$

$f(x) = 2x$

جد :  $(g \circ f)(0)$

2 إذا كان :  $y = n^3 + 3n - 5$

$n = 2x + 1$

جد :  $\frac{dy}{dx}$

3 إذا كان  $y = an^2 + 3n - 7$

$n = 2x + 1$

وكان  $\frac{dy}{dx} = 30$  عندما  $x = 1$  ، جد قيمة  $a$

4 إذا كان :  $y = 3n^2 + 2n + 4$

$x = 8n + 5$

جد :  $\frac{dy}{dx}$  عندما  $n = 1$

5 إذا كان  $xy^2 + 4x^2 = 7x - 2y$

جد :  $\frac{dy}{dx}$

6 إذا كان  $xy^2 + yx^2 = 2$

اثبت ان  $\frac{dy}{dx} = -1$  عند  $(1,1)$

7 جسم يتحرك على خط مستقيم وفق القاعدة  $p(t)=24t^2-t^3$

حيث:  $p(t)$  الازاحة بالامتار ،  $t$  الزمن بالثواني

1 جد سرعة الجسم بعد 2 ثا من بدء الحركة .

2 جد الازاحة عندما التعجيل = صفر.

8 لتكن  $v(t)$  سم/ثا تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وإن

$$v(t)=t^3-t^2+5$$

جد السرعة عندما التعجيل = 8 سم/ثا<sup>2</sup>

9 جد معادلة المماس لمنحني الدالة

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3} \quad \text{عندما } x = -1$$

10 إذا كان :  $f(x) = x - x^2$

$$g(x) = \sqrt{2x+1}$$

حيث :  $x \geq -\frac{1}{2}$

جد معادلة المماس للمنحني  $(fog)(x)$  عند  $x = 4$

11 جد معادلتى المماس للمنحني  $x^2+y^2-5xy=15$  عند  $y = -2$



## [6-7] مشتقات الدوال الدائرية Dervetive of the Circlar funtions

عرفنا سابقاً ان المشتقة الاولى للدالة f عند  $x = a$  هي :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ويمكن استخدام هذا التعريف لبرهان

1.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\sin x (1 - \cos \Delta x) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= -\sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= -\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

ملاحظة :

جا س هو  $\sin x$   
جتا س هو  $\cos x$   
تانجنت ظا س هو  $\tan x$   
كوتانجنت ظتا س هو  $\cot x$   
سكانت قاس هو  $\sec x$   
كوسكانت قتا س هو  $\csc x$



$$2. f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \cos x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$f'(x) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) (-1)$$

$$f'(x) = -\sin x$$

البرهان :

القواعد الأخرى مستطرحها بدون برهان :

$$1. \frac{d}{dx} (\sin y) = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sin 5x = \cos 5x \cdot 5$$

مثال

$$2. \frac{d}{dx} \cos y = -\sin y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos x/2 = -\sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

مثال

$$3. \frac{d}{dx} (\tan y) = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan x^2 = \sec^2 x^2 \cdot 2x$$

مثال

$$4. \frac{d}{dx} \cot y = -\csc^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cot 8x = -\csc^2 8x \cdot (8)$$

مثال

$$5. \frac{d}{dx} \sec y = \sec y \tan y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sec 4x = \sec 4x \tan 4x \cdot (4)$$

مثال



$$\frac{d}{dx} \csc y = -\csc y \cot y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \csc 5x = -\csc 5x \cot 5x \cdot 5$$

مثال

أمثلة :

مثال 1

$$f(x) = \sin (7x^2 + 4x + 1)$$

جد  $f'(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos (7x^2 + 4x + 1)(14x + 4) \\ &= (14x + 4)\cos (7x^2 + 4x + 1) \end{aligned}$$

الحل :

مثال 2

$$f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$$

$$= \sin x^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cos \sqrt[3]{x} \\ &= \frac{\cos \sqrt[3]{x}}{3 \sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

مثال 3

$$f(x) = \cos^3 7x$$

$$f(x) = (\cos 7x)^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 (\cos 7x)^2 (-\sin 7x \cdot 7) \\ &= -21 \cos^2 7x \sin 7x \end{aligned}$$

#### مثال 4

$$f(x) = \cos 3x - \tan 5x + \sec 4x$$

$$f'(x) = -3 \sin 3x - 5 \sec^2 5x + 4 \sec 4x \tan 4x$$

#### مثال 5

جد معادلة المماس عند  $x = 0$  للدالة  $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$

$$f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$$

الحل :

$$f(0) = 3 \sin 0 + 4 \cos 0 = 0 + 4 \times 1 = 4$$

نقطة التماس (0,4)

$$f'(x) = 3 \cos x - 4 \sin x$$

$$f'(0) = 3 \cos 0 - 4 \sin 0$$

$$= 3 - 0 = 3 \quad \text{ميل المماس}$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$3 = \frac{y - 4}{x - 0}$$

$$3x = y - 4$$

$$3x - y + 4 = 0 \quad \text{معادلة المماس}$$

#### مثال 6

$$f(x) = (\sec 5x)^3$$

$$f'(x) \quad \text{جد}$$

الحل :

$$f(x) = (\sec 5x)^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 (\sec 5x)^2 (\sec 5x \tan 5x \cdot 5) \\ &= 15 \sec^3 5x \tan 5x \end{aligned}$$



### مثال 7

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقا للقاعدة:  $p(t) = 3\cos 2t$  حيث  $p(t)$  الازاحة بالامتار  $t$  ، الزمن بالثواني. جد السرعة عندما  $t = 0$  ، جد التعجيل عند  $t = \frac{\pi}{6}$  .

الحل :

$$p'(t) = -3 \sin 2t \cdot 2$$

$$= -6 \sin 2t$$

$$p'(0) = -6 \sin 0 = 0 \text{ m/sec} \quad t = 0 \quad \text{السرعة عندما}$$

$$p''(t) = -6 \cos 2t \cdot 2$$

$$= -12 \cos 2t$$

$$p''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -12 \cos \frac{\pi}{3} = -12 \times \frac{1}{2} = -6 \text{ m/sec}^2$$

### تمارين (3-6)

جد  $\dot{y}$

1.  $y = \sin(5 - x^3)$

3.  $y = x \sec x^2$

5.  $y = \sqrt[3]{\cot^2 4x}$

7.  $y = (\sin 3x - \cos 3x)^2$

2.  $y = \sqrt{\cos(4x + 2)}$

4.  $y = \sin 3x \cos 3x$

6.  $y = \csc^5(x^2 + 1)$

2. إذا كان  $\sin xy^2 = 4x - 3y$  جد  $\frac{dy}{dx}$

اثبت صحة

3.  $\frac{d}{dx} \left[ \sin ax - \frac{1}{3} \sin^3 ax \right] = a \cos^3 ax$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} \right) = \frac{4 \sin x}{(2 + \cos x)^2}$$

جد :  $y'$

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x$$

جد معادلة المماس للمنحني  $f(x) = \sin 2x + \sin x$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ عند}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة  $p(t) = \sin 2t - \cos 2t$

حيث  $p(t)$  الازاحة بالامتار،  $t$  الزمن بالثواني.

جد كلاً من بعد الجسم ، سرعته وتعجيله عندما  $t = \pi / 4$

إذا كان  $v(t)$  سم / ثا تمثل سرعة جسم متحرك على خط مستقيم حيث

$$v(t) = 4 \sin \frac{t\pi}{4} + 8 \cos \frac{t\pi}{4}$$

جد السرعة والتعجيل عندما  $t = 1$



الهندسة الفضائية ( المجسمة ) Space Geometry

تمهيد

[7-1] عبارة أولية

[7-2] العلاقة بين مستقيمين في الفضاء

[7-2-1] العلاقة بين مستقيم ومستوي

[7-2-2] العلاقة بين مستويين في الفضاء

[7-3] مبرهنة (1)

[7-3-1] نتيجة

[7-4] مبرهنة (2)

[7-5] مبرهنة (3)

[7-6] مبرهنة (4)

[7-6-1] نتيجة

[7-7] تعامد المستقيمت والمستويات

[7-8] مبرهنة (5)

[7-8-1] نتيجة

[7-9] مبرهنة (6) ( الاعمدة الثلاثة )

[7-9-1] نتيجة

## الفصل السابع

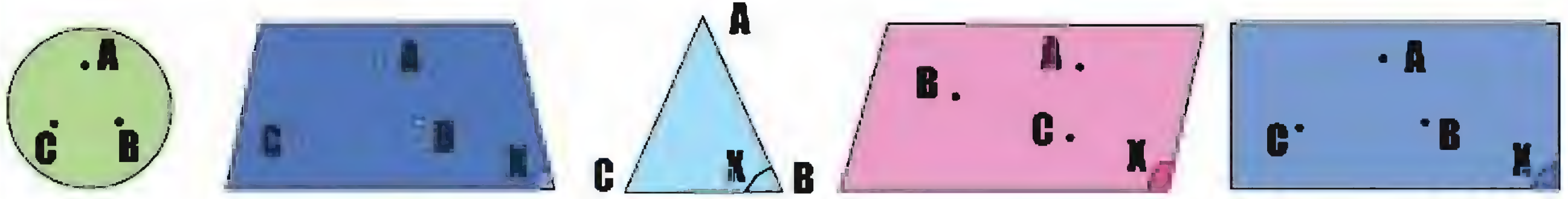
### الهندسة الفضائية ( المجسمة ) Space Geometry

تمهيد

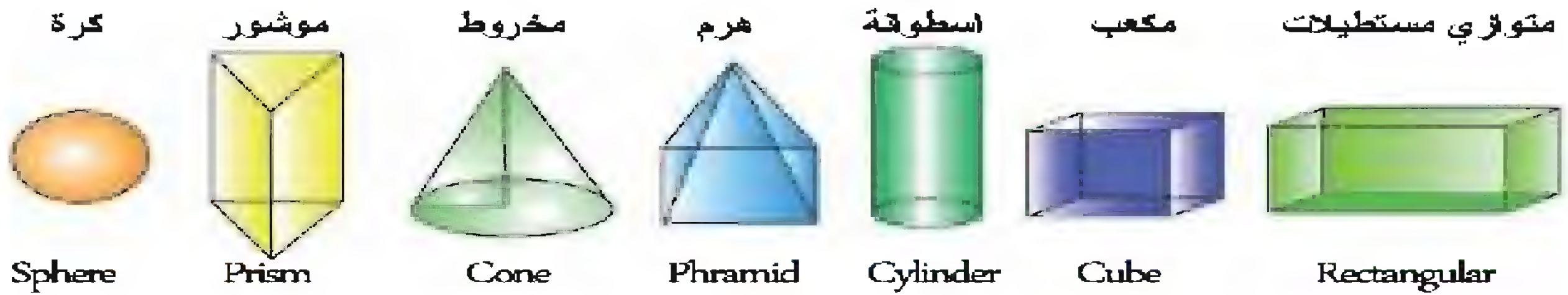
سبق ان درست في الهندسة المستوية كلاً من النقطة والمستقيم حيث رمزنا له  $AB$  أو  $L$  واستخدمنا الرمز  $\overline{AB}$  للدلالة على قطعة المستقيم  $AB$  والرمز  $\|AB\|$  للدلالة على طول القطعة المستقيمة  $AB$

وسندرس مصطلح هندسي يدعى المستوي  $plane$  وهو الذي لو أخذت عليه اي نقطتين ووصل بينهما بمستقيم لنطبقت جميع نقاط ذلك المستقيم عليه مثل زجاج النافذة ، سطح المنضدة ، ساحة ملعب كرة القدم ، .....

وهو بلا حدود من جميع جهاته ويمثل على شكل مثلث  $Triangle$ ، مربع  $Square$ ، مستطيل  $Rectangle$ ، متوازي اضلاع  $Parallelogram$ ، شبه منحرف  $Trapezoid$ ، دائرة  $Circle$ ، ..... ويرمز له  $(X)$  أو  $(Y)$  ويقرأ المستوي  $X$  أو  $Y$  كما في الأشكال الآتية :



ودرست العلاقة بين النقطة ( point ) والمستقيم ( line ) التي يحويها مستوي واحد كما درست بعض المجسمات مثل :

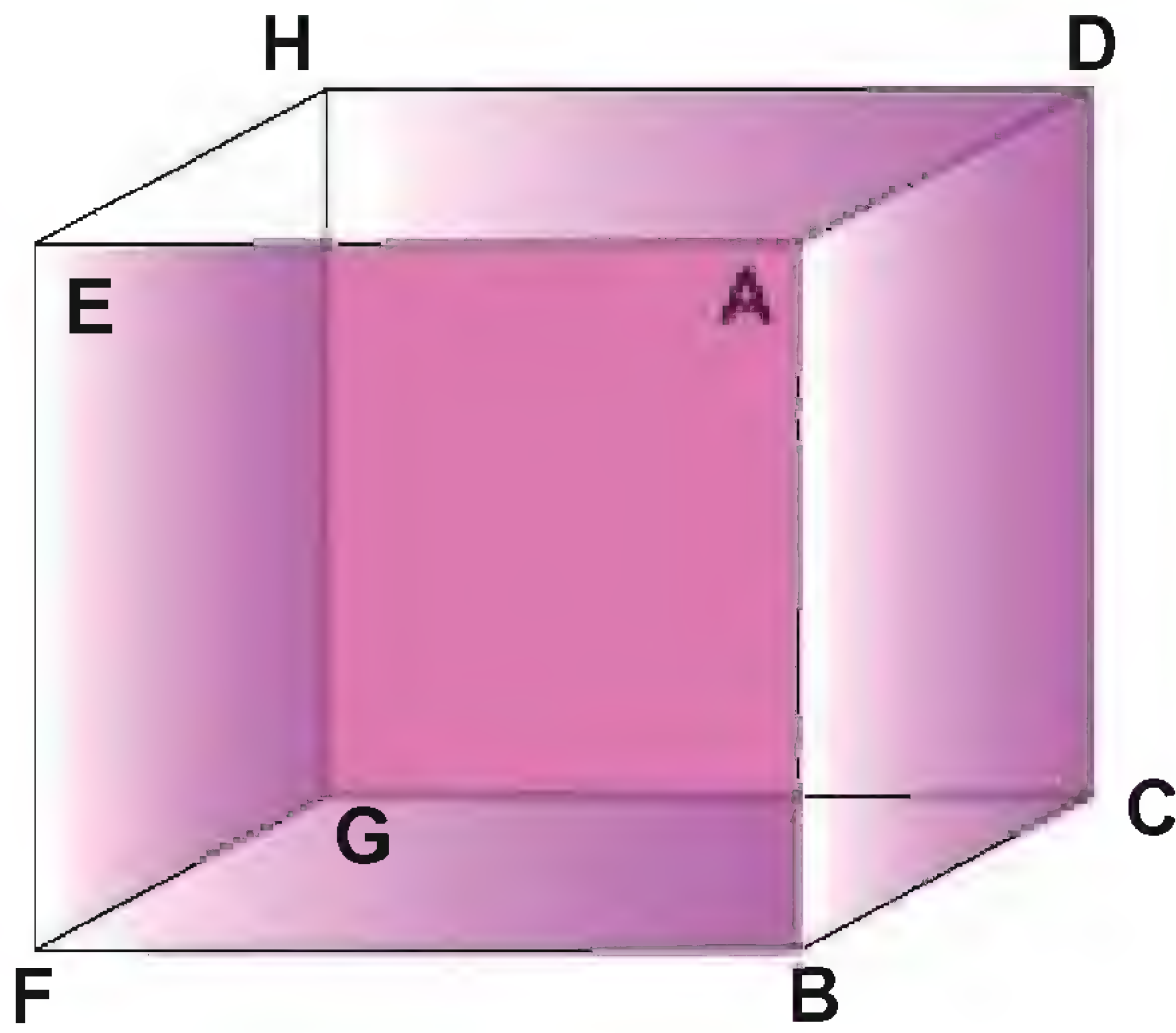


كما شاهدتها كالأجهزة المنزلية ( الثلاجة ، الغسالة ، المبردة ، التلفزيون ، ... ) وهي تمثل اشكالا هندسية ذات ثلاثة أبعاد وتشغل حيزاً من الفراغ وأن دراستها تسمى بالهندسة الفضائية وهي التي تدرس العلاقة بين النقط والمستقيمات والمستويات التي يحويها الفضاء .



### نشاط (1):

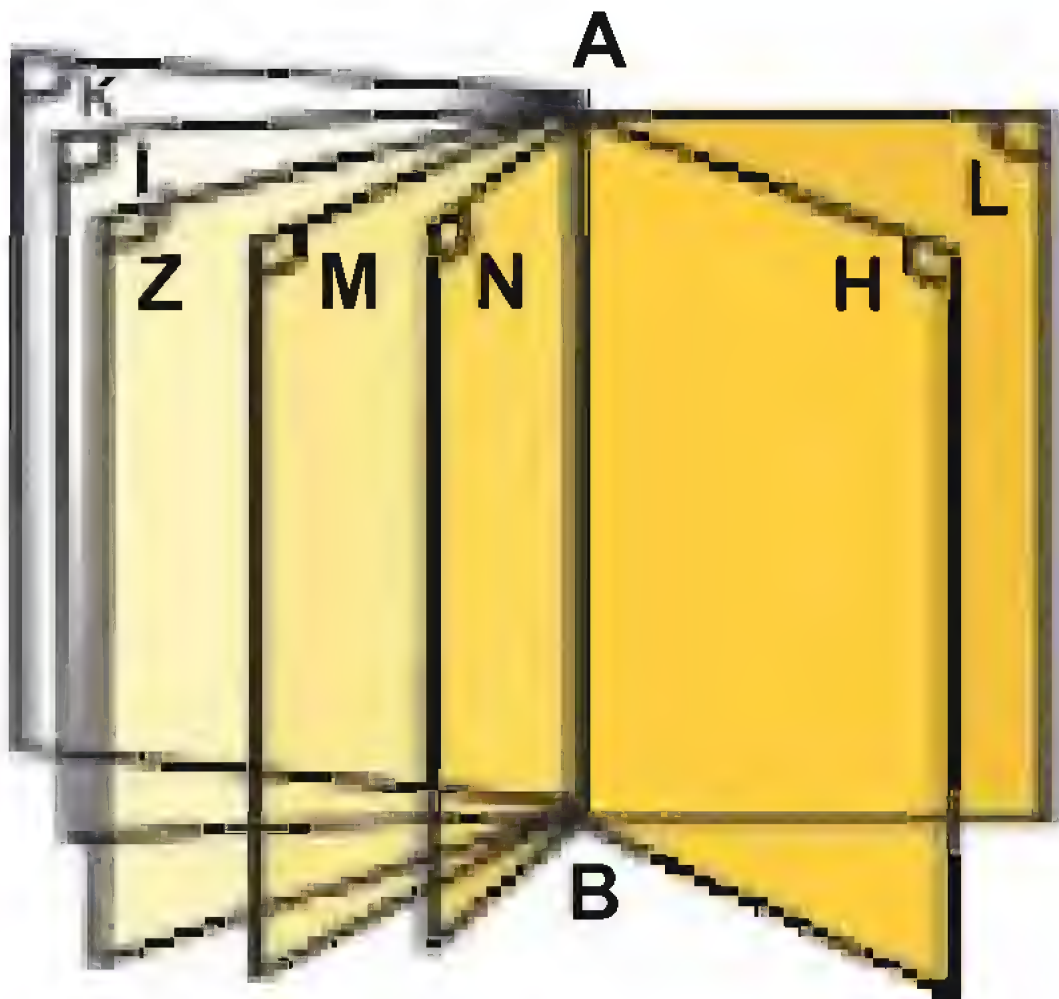
لاحظ الشكل الاتي للاجابة عن الاسئلة الآتية:



- 1- المستقيمات التي تمر بالنقطة **A**
- 2- المستقيمات التي تمر بالنقطتين **A** , **B** معاً
- 3- المستويات التي تمر بالنقطة **A**
- 4- المستويات التي تمر بالنقطتين **A** و **B** معاً

### نشاط (2):

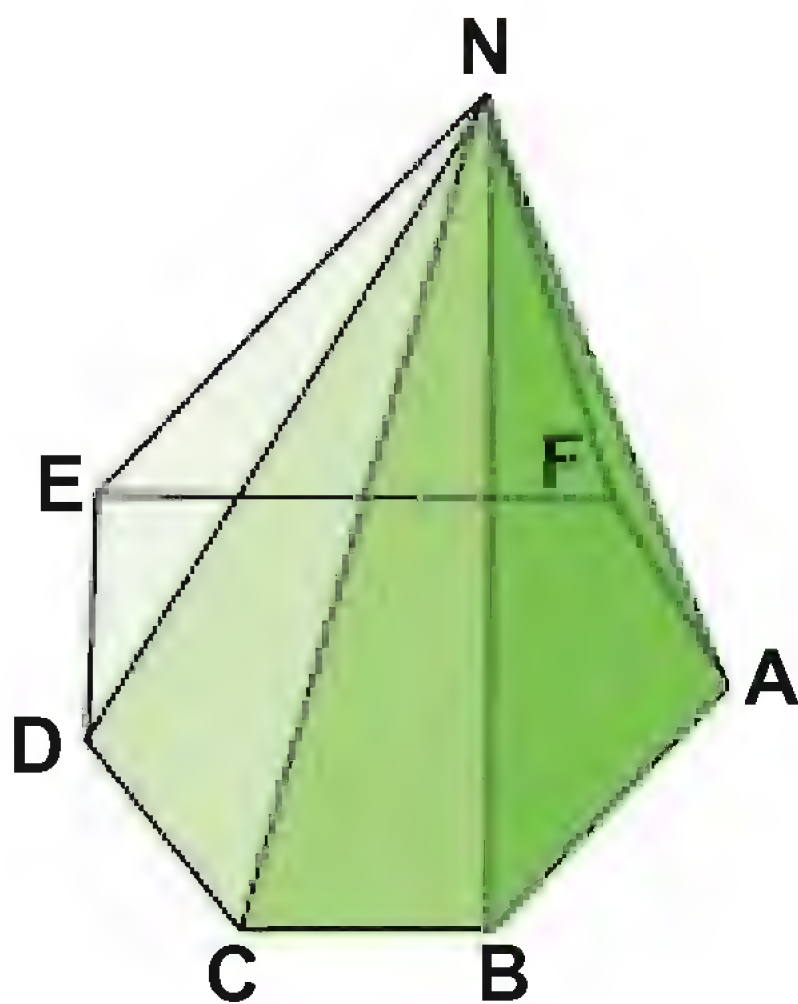
لاحظ الشكل الاتي للاجابة عن الاسئلة الآتية:



- 1- اذكر المستويات التي تمر بالنقطة **A**
- 2- اذكر المستويات التي تمر بالمستقيم **AB**

### نشاط (3):

لاحظ الشكل الاتي للاجابة عن الاسئلة الآتية:



- 1- اذكر مستقيماً يمر بالنقطة **N**
- 2- اذكر مستويّاً يمر بالنقطة **N**
- 3- اذكر مستويّاً يمر بالنقطتين **A** , **N**
- 4- اذكر مستويّاً يمر بالنقاط **B** , **A** , **N**
- 5- اذكر اربع نقط ليست في مستوٍ واحد



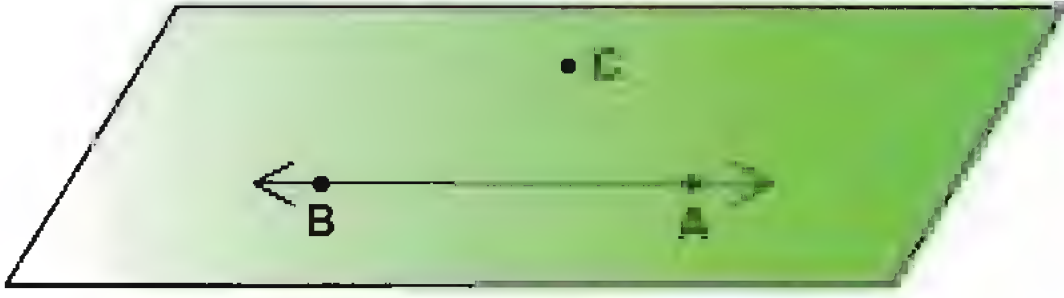
مما سبق نستنتج :

[7-1] عبارة اولية :

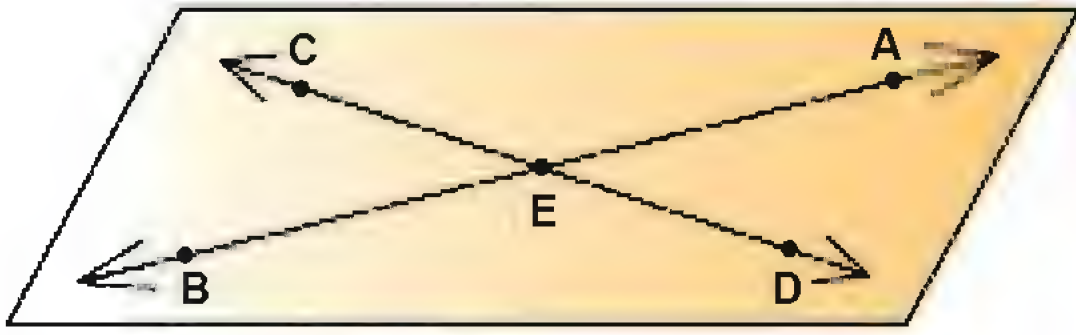
لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة Non - collinear يوجد مستوٍ واحد فقط (وحيد) يحويها

ومنها نحصل على :

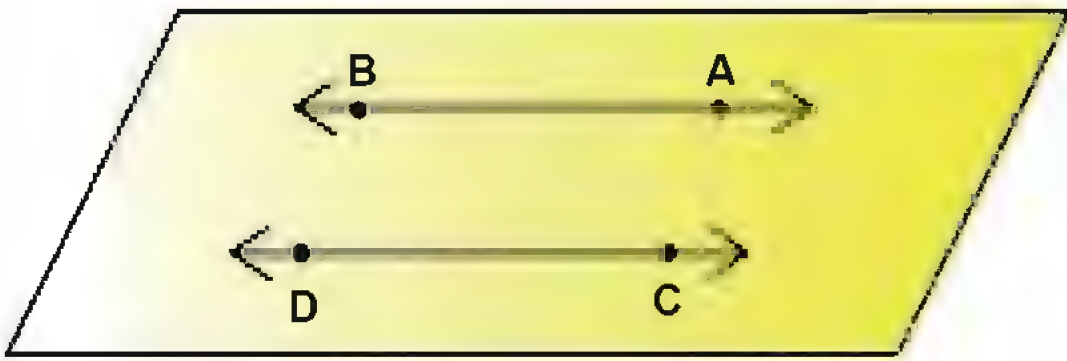
لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه يوجد مستوٍ وحيد يحويها.



لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويها.



لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويها .



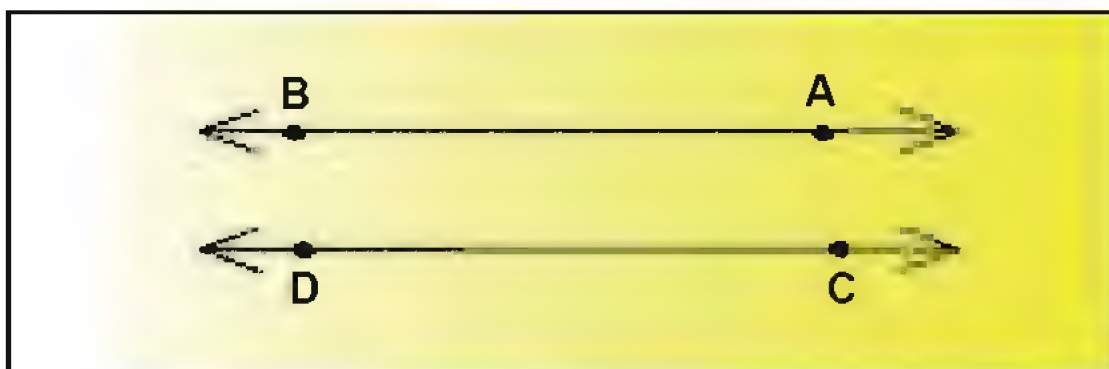
[7-2] العلاقة بين مستقيمين في الفضاء:

المستقيمان المتقاطعان Intersecting Lines : اللذان يشتركان بنقطة واحدة فقط وهما في

مستوٍ واحد

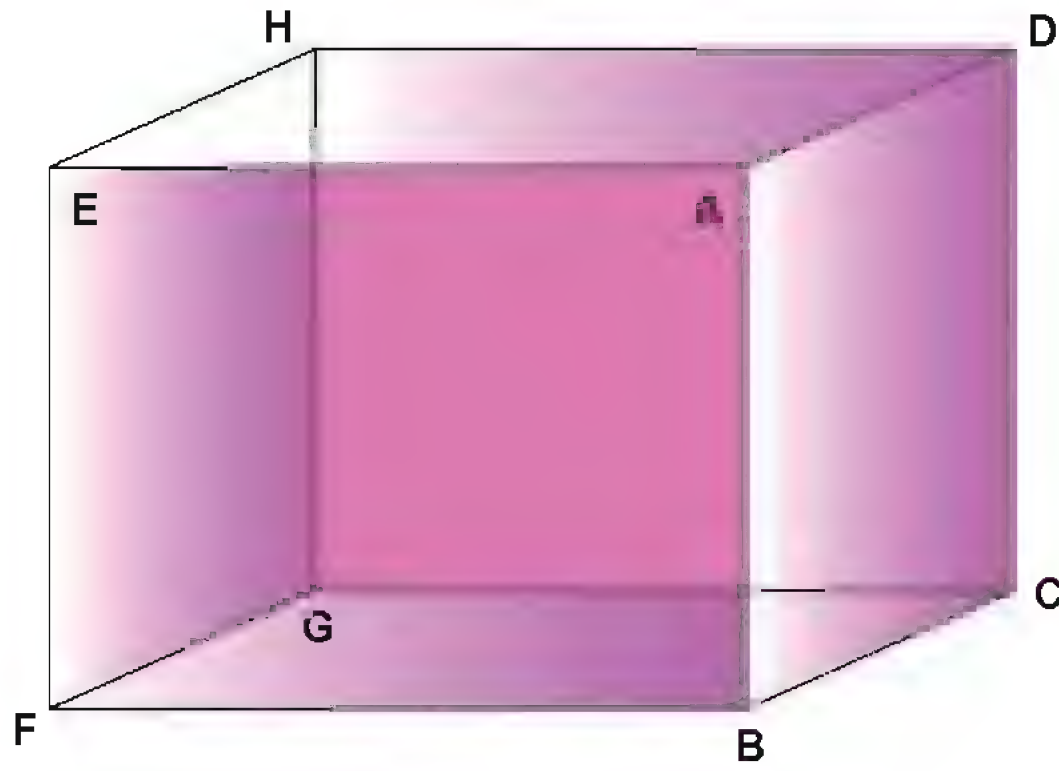


المستقيمان المتوازيان parallel lines : اذا لم يشتركا باية نقطة وهما في مستوٍ واحد





المستقيمان المتخالفان skew lines : اللذان لا يمكن ان يحتويهما مستوي واحد ( اي انهما غير متقاطعين وغير متوازيين )



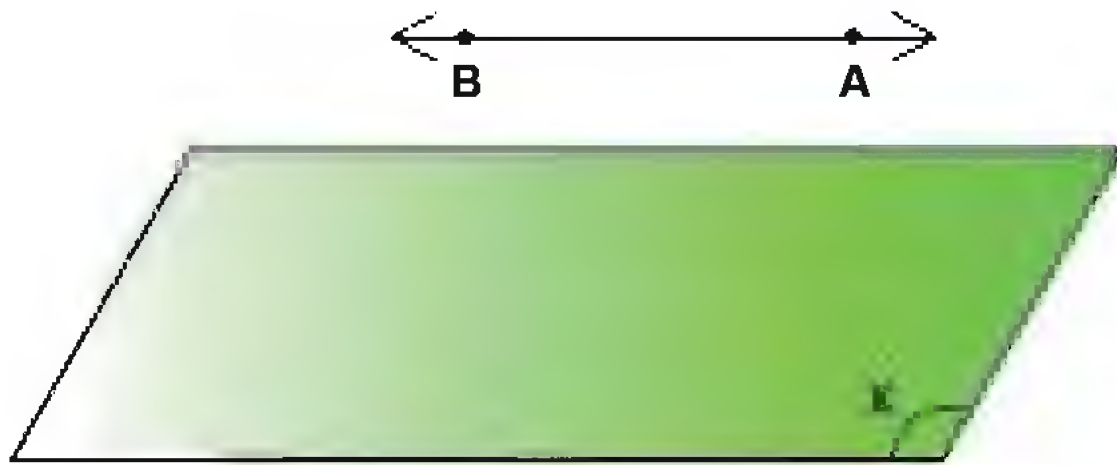
نشاط:

من الشكل المجاور نلاحظ  $\overleftrightarrow{AB}$  ,  $\overleftrightarrow{DH}$  متخالفين:

- 1 اذكر ثلاثة ازواج من المستقيمات المتخالفة.
- 2 اذكر ثلاثة ازواج من المستقيمات المتوازية.
- 3 اذكر ثلاثة ازواج من المستقيمات المتقاطعة.

[7-2-1] العلاقة بين مستقيم ومستوي :

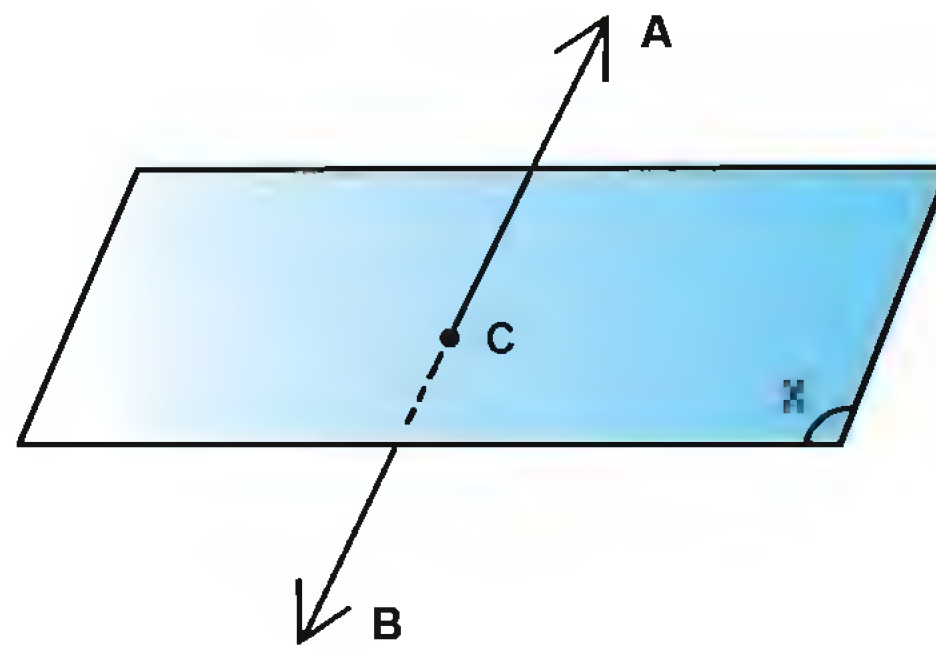
المستقيم الموازي للمستوي : اذا لم يشترك معه بأية نقطة أو كان محتوي فيه



$$\overleftrightarrow{AB} \parallel (X) , \overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \emptyset$$

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

المستقيم القاطع للمستوي : اذا اشترك معه بنقطة واحدة فقط



$$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{ C \}$$

## [7-2-2] العلاقة بين مستويين في الفضاء

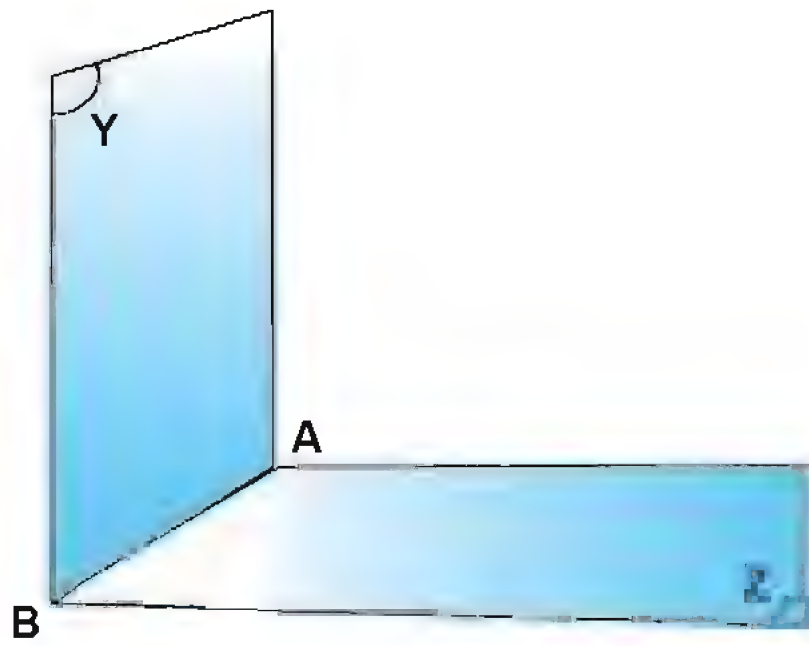
المستويان المتوازيان : إذا لم يشتركا بأيّة نقطة



$$(X) \cap (Y) = \emptyset$$

$$\therefore (X) \parallel (Y)$$

المستويان المتقاطعان : إذا اشتركا بمستقيم واحد فقط



$$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$$

نلاحظ انه اذا اشترك المستويان بنقطة فانهما يشتركان بخط مستقيم يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين ويسمى ( مستقيم التقاطع ) ويكون محتوي في كليهما

### ملاحظة :

1 التساوي : إسمان لشيء واحد.

2 كل مستقيم يوازي نفسه.

3 كل مستوي يوازي نفسه.



مما تقدم نستنتج:

1 إذا توازي مستقيمان فالمستوي المار باحدهما ونقطة من الآخر فانه يحويهما

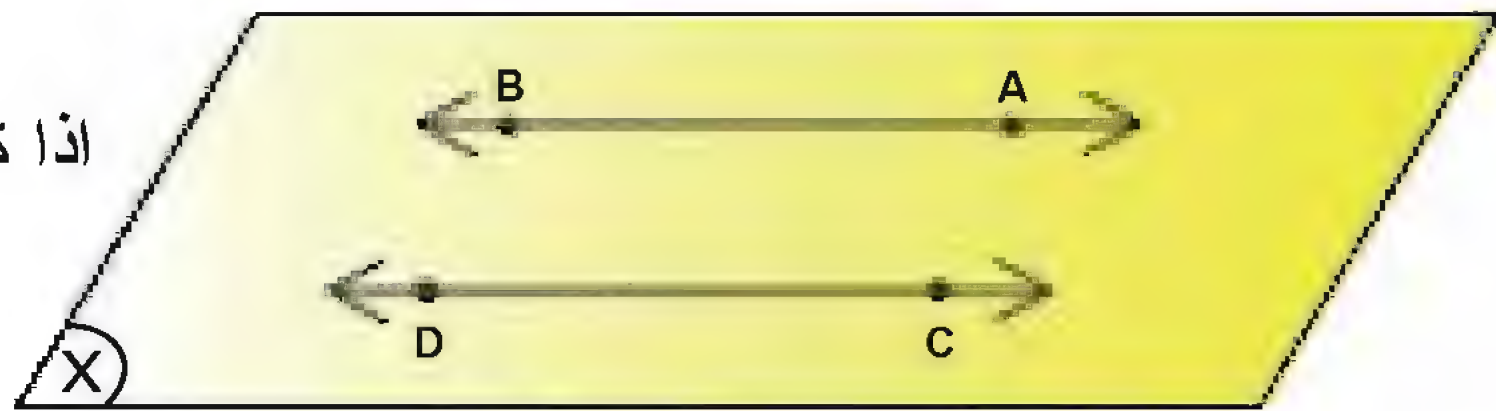
$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

$$C \in (X)$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (X) \quad \text{فإن}$$

إذا كان

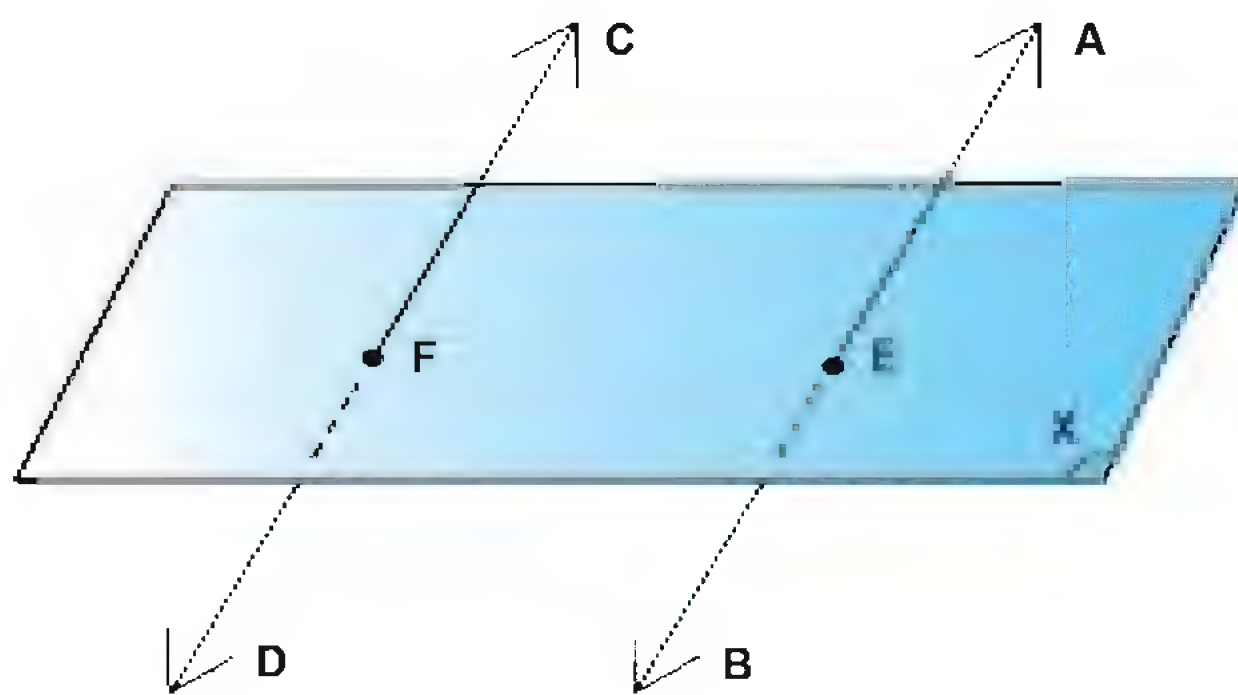


2 المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر.

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

$$\overleftrightarrow{AB} \text{ يقطع } (X) \text{ في } E$$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \text{ يقطع } (X) \text{ في } F$$

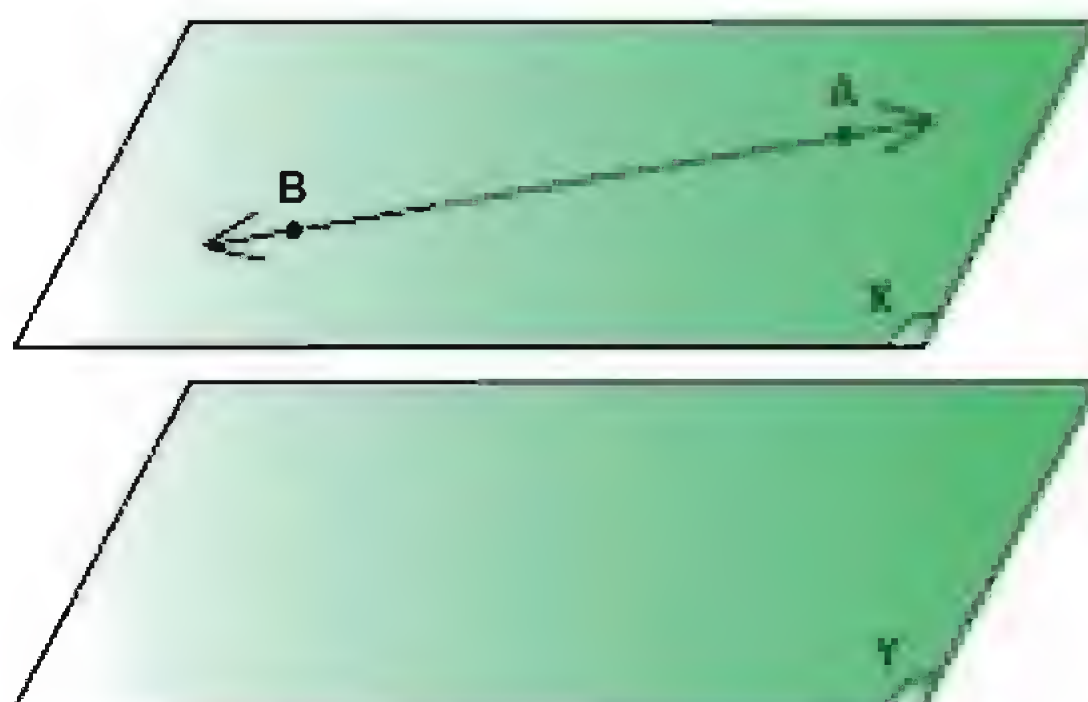


3 إذا توازي مستويان فالمستقيم المحتوي في احدهما يوازي الآخر

$$(X) // (Y)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} // (Y)$$



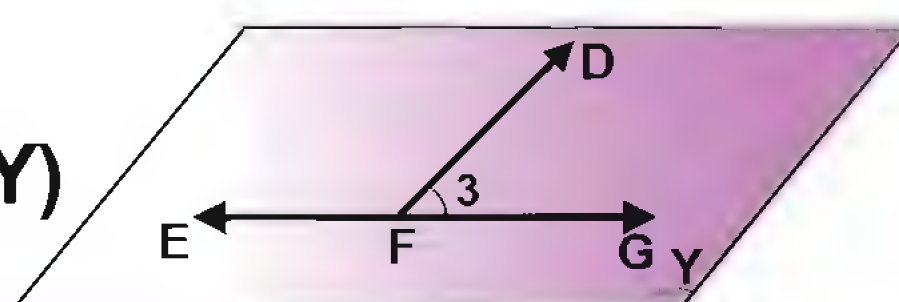
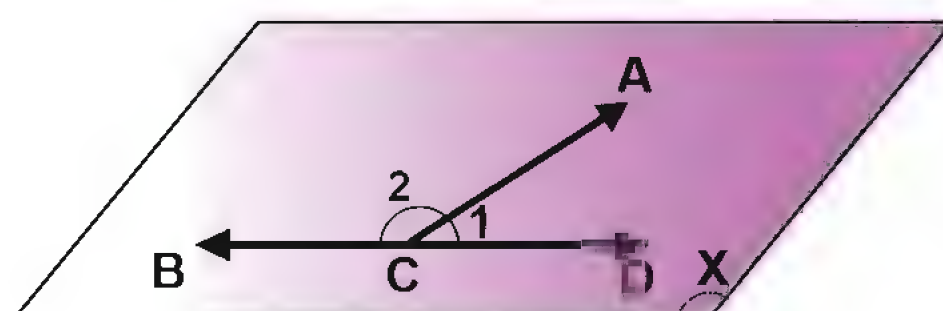
4 إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى تساوت قياسهما او تكاملتا وتوازي مستويهما

$$\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{DF}$$

$$\overleftrightarrow{BD} // \overleftrightarrow{EG}$$

$$\therefore m \angle 1 = m \angle 3$$

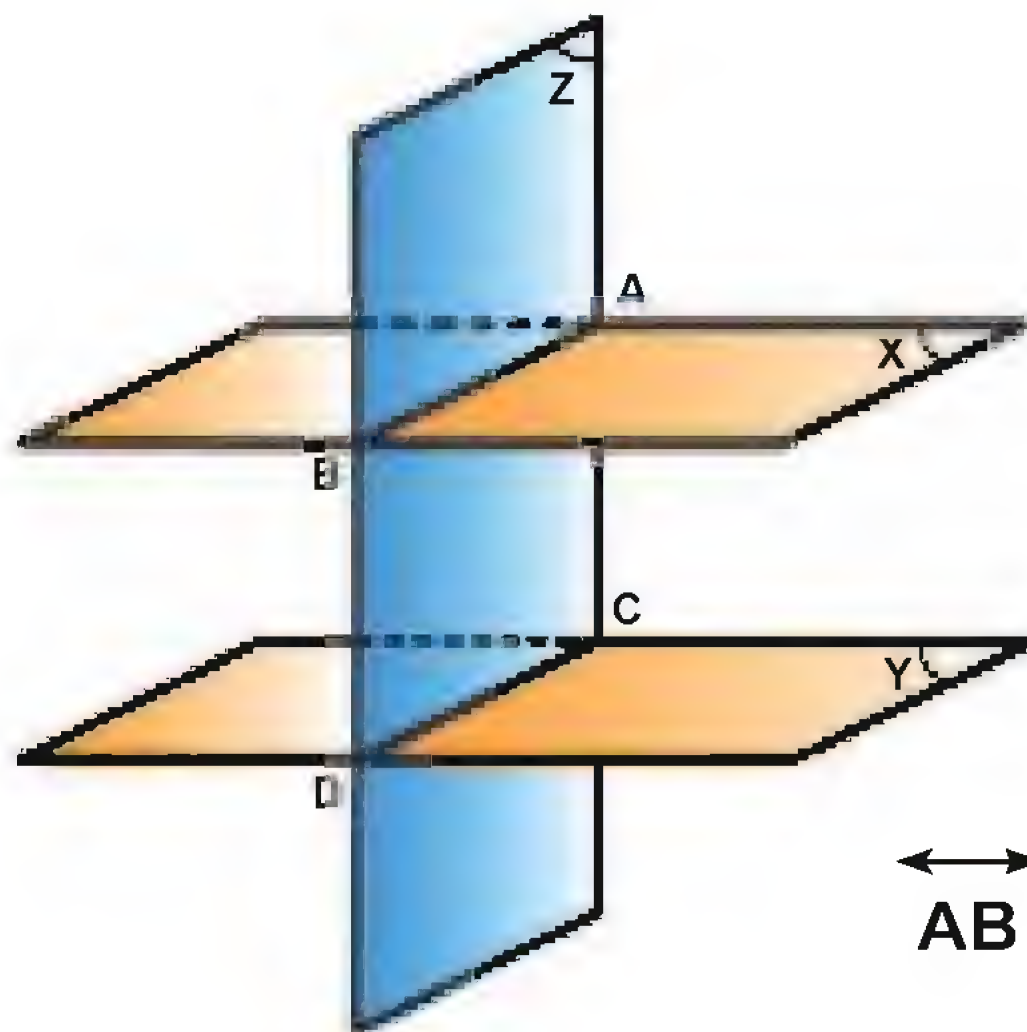
$$m \angle 2 + m \angle 3 = 180^\circ, (X) // (Y)$$



### Theorem : [7-3] مبرهنة (1)

خط تقاطع مستويين متوازيين بمستوى ثالث متوازيين

$$\begin{aligned} (X) // (Y) \\ (X) \cap (Z) &= \overleftrightarrow{AB} \\ (Y) \cap (Z) &= \overleftrightarrow{CD} \end{aligned}$$



المعطيات:

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \quad \text{المطلوب اثباته:}$$

المبرهان

$$\left. \begin{aligned} (X) \cap (Z) &= \overleftrightarrow{AB} \\ (Y) \cap (Z) &= \overleftrightarrow{CD} \end{aligned} \right\} \text{(معطى)}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \overleftrightarrow{AB} \subset (X), \overleftrightarrow{AB} \subset (Z) \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \subset (Z) \end{aligned} \right\}$$

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

في (Z) اذا لم يكن  $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$  فسوف يقطعه في نقطة مثل E

$$\left. \begin{aligned} \therefore E \in \overleftrightarrow{AB} \subset (X) &\Rightarrow E \in (X) \\ E \in \overleftrightarrow{CD} \subset (Y) &\Rightarrow E \in (Y) \end{aligned} \right\}$$

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

$$\therefore E \in (X) \cap (Y) \quad (\text{لاشتراكهما في نقطة } E)$$

وهذا خلاف الفرض حيث  $(X) // (Y)$   
اذن  $\overleftrightarrow{AB}$  لا يقطع  $\overleftrightarrow{CD}$

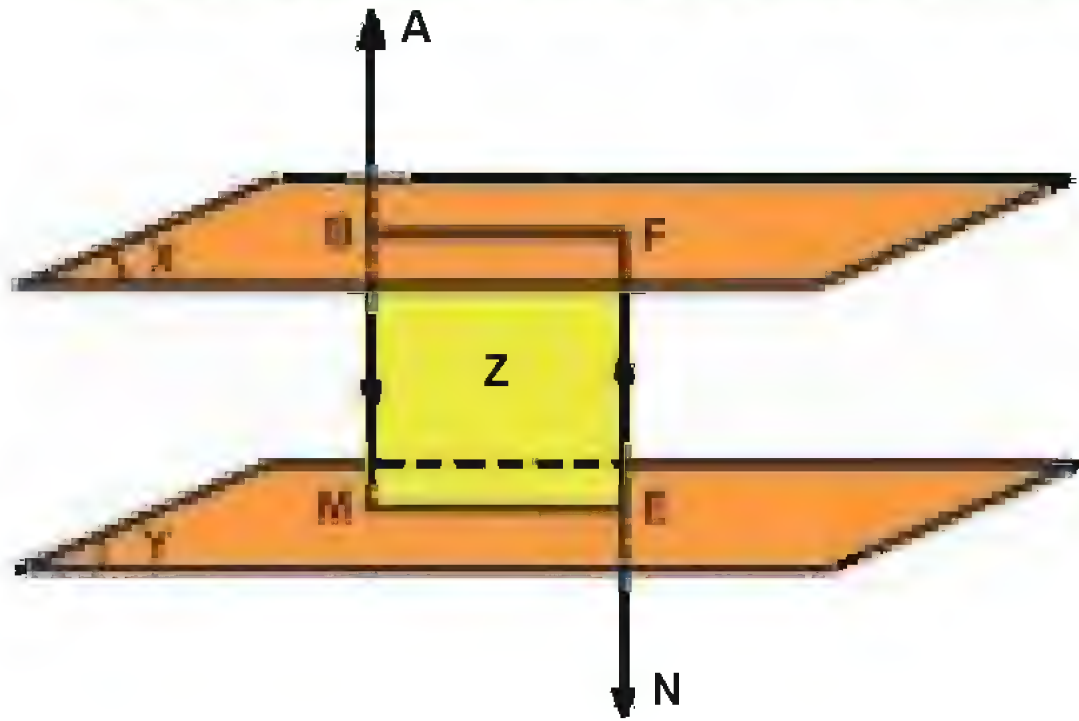
$$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \quad (\text{يتوازي المستقيمان اذا وقعا في مستو واحد وغير متقاطعين})$$

النتيجة



[7-3-1] نتيجة (1):

المستقيم الذي يقطع احد مستويين متوازيين يقطع الآخر ايضاً



المعطيات:  $(X) \parallel (Y)$  ,  $\overleftrightarrow{AB}$  يقطع  $(X)$  في B  
المطلوب اثباته:  $\overleftrightarrow{AB}$  يقطع  $(Y)$

البرهان: لتكن  $E \in (Y)$

(يمكن رسم مستقيم موازٍ لآخر من نقطة لا تنتمي اليه)  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EN}$  نرسم

نعين  $(Z)$  بالمستقيمين  $\overleftrightarrow{AB}$  ,  $\overleftrightarrow{EF}$  ( يتعين مستو وحيد بمستقيمين متوازيين )

( خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستو ثالث متوازيين )  $\overleftrightarrow{EM} \parallel \overleftrightarrow{FB}$

اذن  $\overleftrightarrow{AB}$  يقطع  $(Y)$  في M

ن.م.م

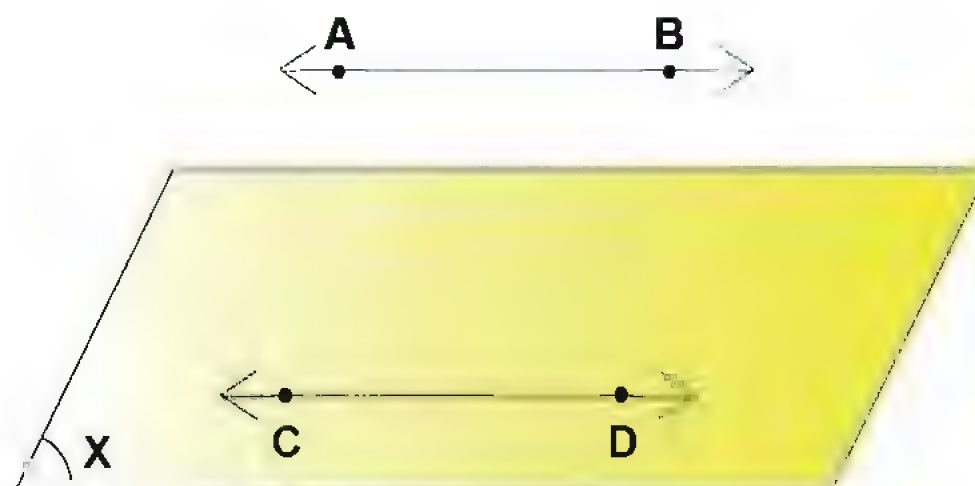
[7-4] مبرهنة (2) : Theorem

اذا توازي مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الآخر

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  ,  $CD \subset (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$



المطلوب اثباته:



**البرهان:** إذا كان  $\overleftrightarrow{AB}$  لايوازي  $(X)$  فيقطعه بنقطة مثل  $E$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$  (معطى)

(المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر)  $\therefore (X)$  يقطع  $\overleftrightarrow{CD}$

وهذا خلاف الفرض لان  $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

اذن  $\overleftrightarrow{AB}$  لا يقطع  $(X)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // (X)$

**النتيجة**

### [7-5] مبرهنة (3) Theorem

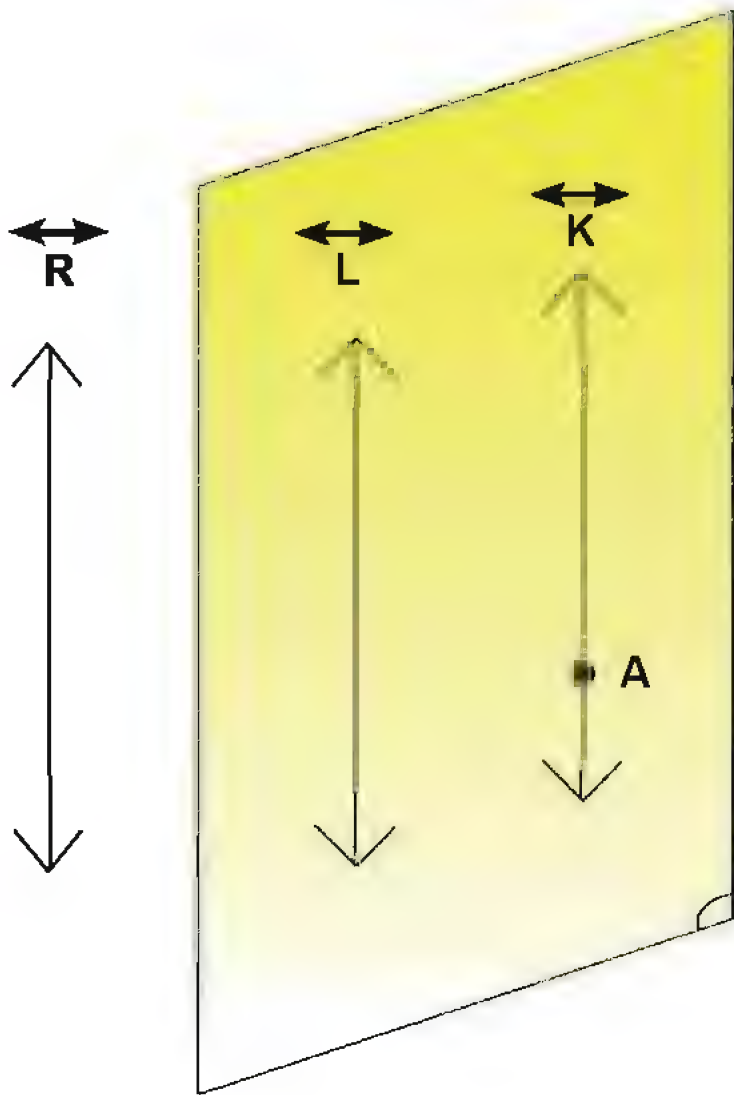
المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث ( في الفراغ ) متوازيان

**المعطيات:**

$\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{R}, \overleftrightarrow{K} // \overleftrightarrow{R}$

**المطلوب اثباته:**

$\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{K}$



**البرهان:** لتكن  $A \in \overleftrightarrow{K}$

بالمستقيم  $L$  ونقطة  $A$  نعين  $(X)$

[يتعين مستو وحيد بمستقيم ونقطة لا تنتمي اليه ]

ان لم يكن  $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$  فسوف يقطعه في  $A$

$\therefore (X)$  يقطع  $\overleftrightarrow{R}$  وهذا مستحيل

( المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر )

$\therefore \overleftrightarrow{K} \subset (X)$

في  $(X)$  ان لم يكن  $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{K}$ ، فيقطعه في نقطة مثل  $M$

ينتج وجود مستقيمين مرسومين من  $M$  يوازيان  $\overleftrightarrow{R}$  وهذا خلاف الفرض (عبارة التوازي)

اذن  $\overleftrightarrow{K}$  لا يقطع  $\overleftrightarrow{L}$

$\therefore \overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{K}$

**النتيجة**



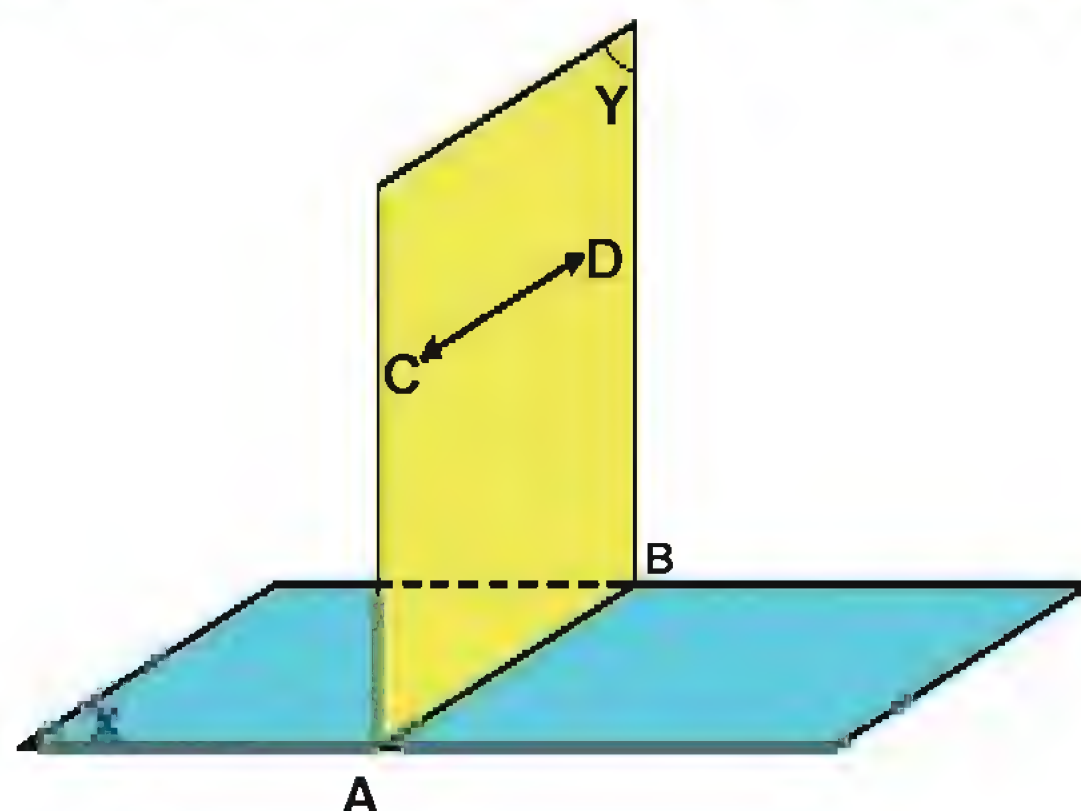
# Theorem [7-6] **مبرهنة (4):**

مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوي في احدهما ويوازي الآخر

**المعطيات:**

$$\begin{aligned} (X) \cap (Y) &= \overleftrightarrow{AB} \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} // (X) \end{aligned}$$

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$



**المطلوب اثباته:**

**البرهان:**

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD} &\subset (Y) \\ \overleftrightarrow{CD} // (X) &\text{ (معطى)} \end{aligned}$$

في (Y) لو كان  $\overleftrightarrow{CD}$  يقطع  $\overleftrightarrow{AB}$  لنتج ان  $\overleftrightarrow{CD}$  يقطع (X)

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

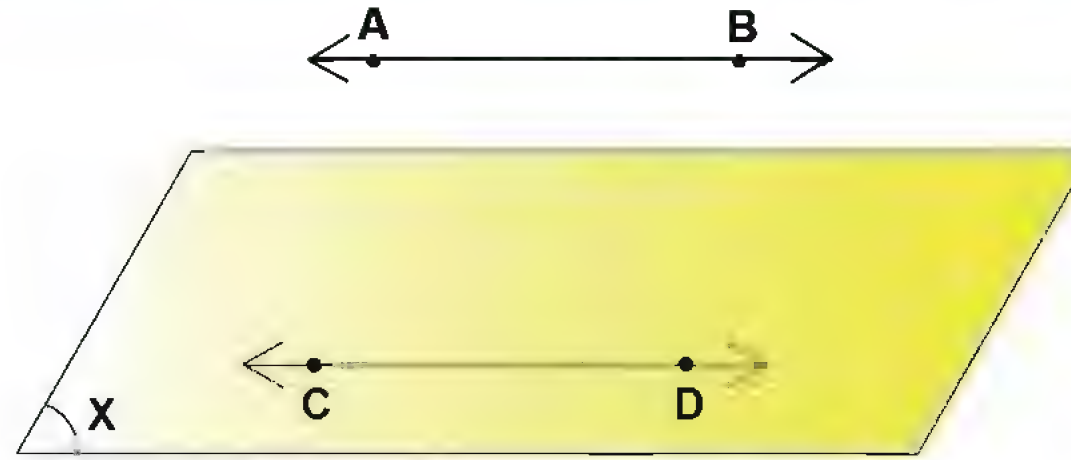
وهذا خلاف الفرض حيث

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{CD} // (X) \\ \therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \end{aligned}$$

**و. ه. م**

### [7-6-1] نتيجة (1)

إذا وازى مستقيم مستويًا معلومًا فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقاط المستوي موازيًا للمستقيم المعلوم يكون محتوي في المستوي



المعطيات :

$$\begin{aligned} & C \in (X) , \overleftrightarrow{AB} \parallel (X) \\ & \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB} \end{aligned}$$

المطلوب اثباته

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$$

البرهان :

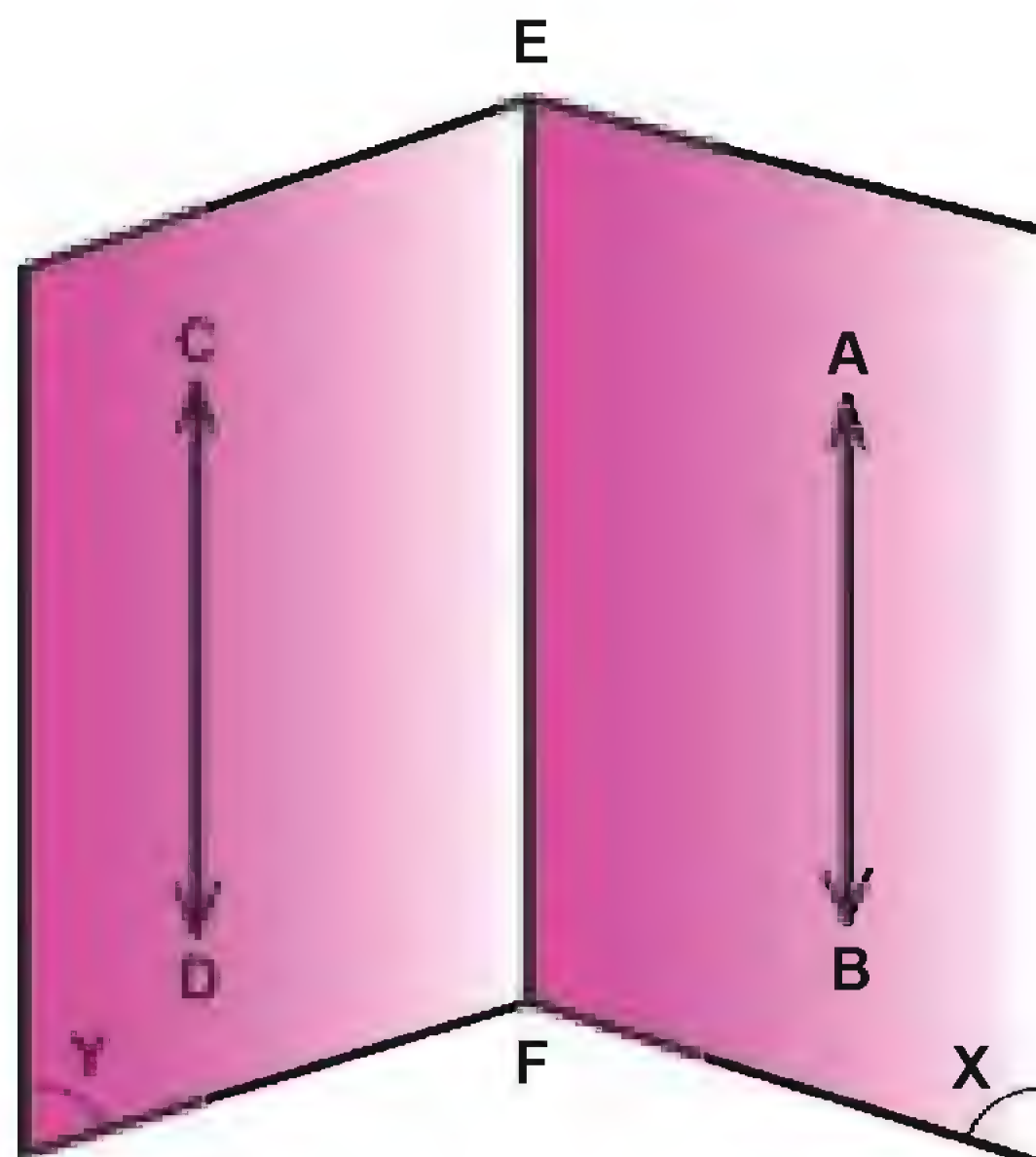
ان لم يكن  $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$  فيكون قاطعاً له في نقطة C  
 $\therefore (X)$  يقطع  $\overleftrightarrow{AB}$  ( المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر )  
 وهذا خلاف الفرض حيث  $\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$

$\therefore$  اذن  $\overleftrightarrow{CD}$  لا يقطع  $(X)$  بل محتوي فيه

النتيجة



**مثال:** إذا احتوى كل من مستويين متقاطعين على احد مستقيمين متوازيين فمستقيم التقاطع يوازي كلا من المستقيمين المتوازيين



**المعطيات:**

$$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{AB} \subset (X), \overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

**المطلوب اثباته:**

$$\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$$

**المبرهنات:**

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \text{ (معطى)}$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$$

(إذا توازي مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الآخر)

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} // (Y) \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$$

(مبرهنة (4) مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل

مستقيم محتوي في احدهما ويوازي الآخر)

$$\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$$

(المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان)

**النتيجة:**

## تمارين (1-7)

1 / اي من العبارات الآتية خاطئة واي منها صائبة وبين السبب :

- أ - اذا كان  $(X) // \overleftrightarrow{AB}$  فيوجد مستقيم وحيد يوازي  $\overleftrightarrow{AB}$  ومحتوى في  $(X)$ .
- ب - يوجد مستوٍ وحيد موازٍ لمستوٍ معلوم .
- ج - المستقيمان الموازيان لمستوٍ واحد متوازيان .
- د - اذا وازى ضلعان من مثلث مستوياً معلوماً كان ضلعه الثالث موازياً للمستوي المعلوم .
- هـ - المستقيمان المخالفان لمستقيم ثالث متخالفان .
- و - اذا كان  $(X)$  ،  $(Y)$  مستويين غير متوازيين فانهما يتقاطعان بنقطة واحدة .
- ز - اذا كانت  $A, B \in (X)$  فان  $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{A, B\}$ .
- ح - كل مستقيم يمكن ان يمر به عدد غير منته من المستويات .
- ط - عدد المستويات المختلفة المارة بثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة هو (3) مستويات .
- ي - يوجد مستوٍ وحيد يحوي مستقيمين متخالفين .

2 / صحح ما تراه خطأ في العبارات الآتية :

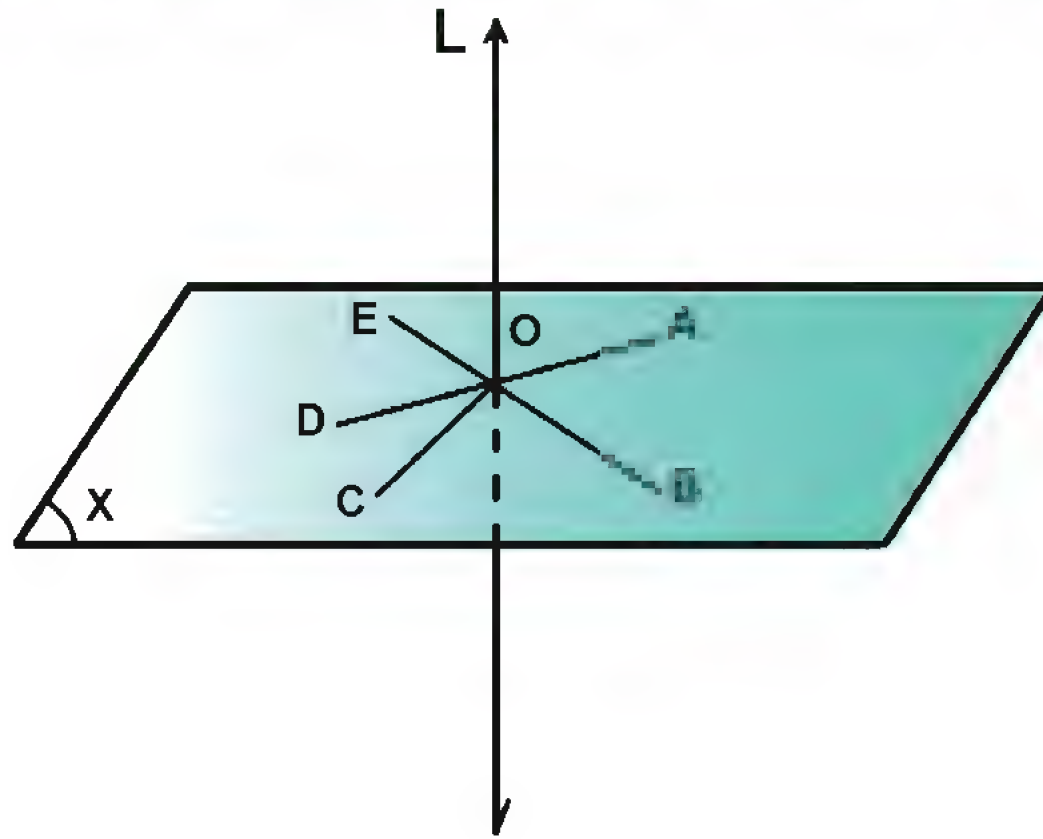
- أ - اذا كان  $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$  ،  $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$  فان  $\overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{K}$  حيث  $A \in (X)$
- ب - يتقاطع المستويان المختلفان في مستوٍ .
- ج - اذا كان تقاطع المستقيم  $L$  والمستوي  $(X)$  يساوي  $\emptyset$  فان  $\overleftrightarrow{L} // (X)$
- د - اذا كان المستقيم  $\overleftrightarrow{L} // (X)$  فان  $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$  حيث  $A \in (X)$
- هـ - اذا كان المستقيم  $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$  فان  $\overleftrightarrow{\emptyset} = \overleftrightarrow{K} \cap (X)$
- و - يكون المستويان متوازيين اذا اشتركا في نقطة واحدة على الاقل .
- ز - المستقيم المحتوى في احد مستويين متوازيين يقطع المستوي الآخر .
- ح - يكون المستقيم محتوى في المستوي عندما يشترك معه بنقطة واحدة على الاقل.
- ط - اذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوٍ وتقاطع المستويان فان مستقيم تقاطعهما يقطع كلا المستقيمين .
- ي - اذا قطع مستوٍ كلا من مستويين متوازيين فان خطي تقاطعه معهما يكونان متخالفين .



## [7-7] تعامد المستقيمت والمستويات:

تعريف:

1 المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمت المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي

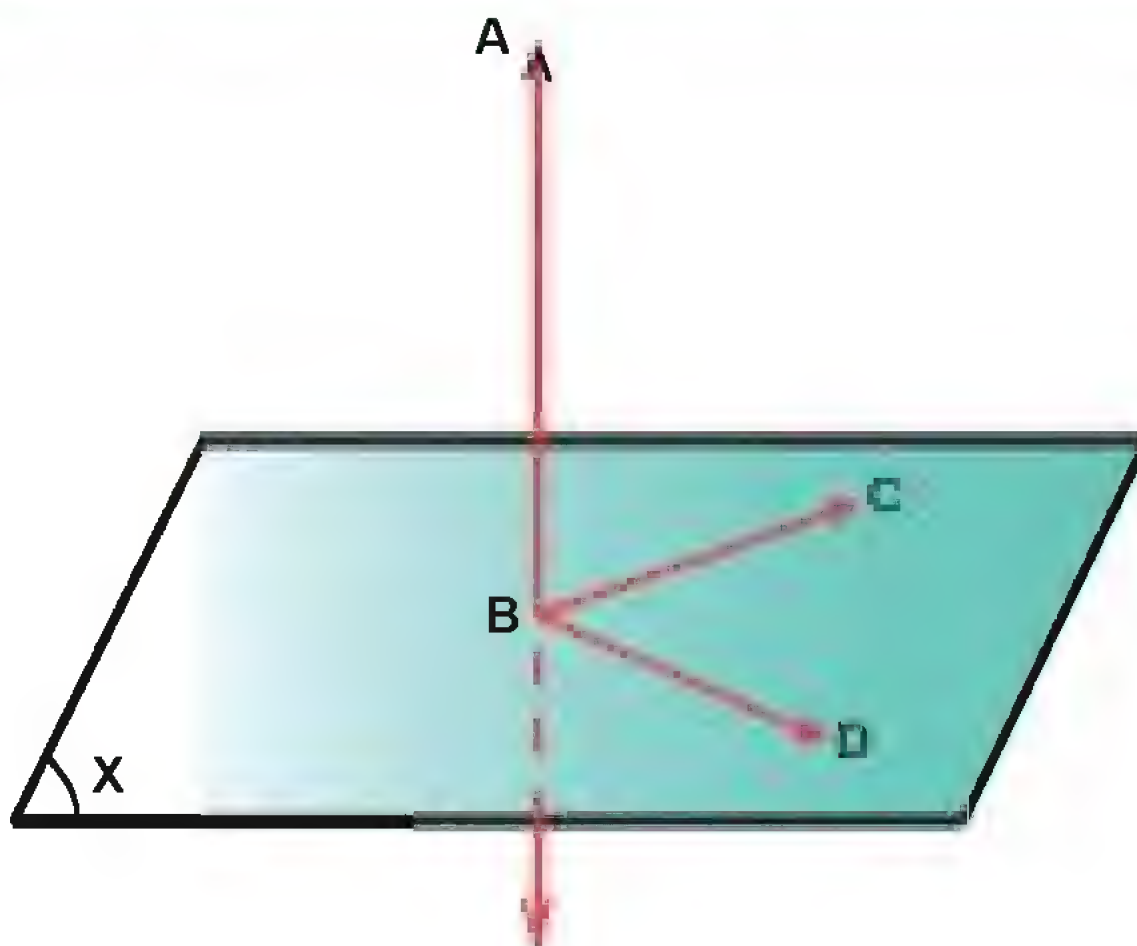


$$\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, \dots \subset (X), \overleftrightarrow{L} \perp (X)$$

$$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, \dots$$

فيكون:

2 المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويها



$$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \subset (X)$$

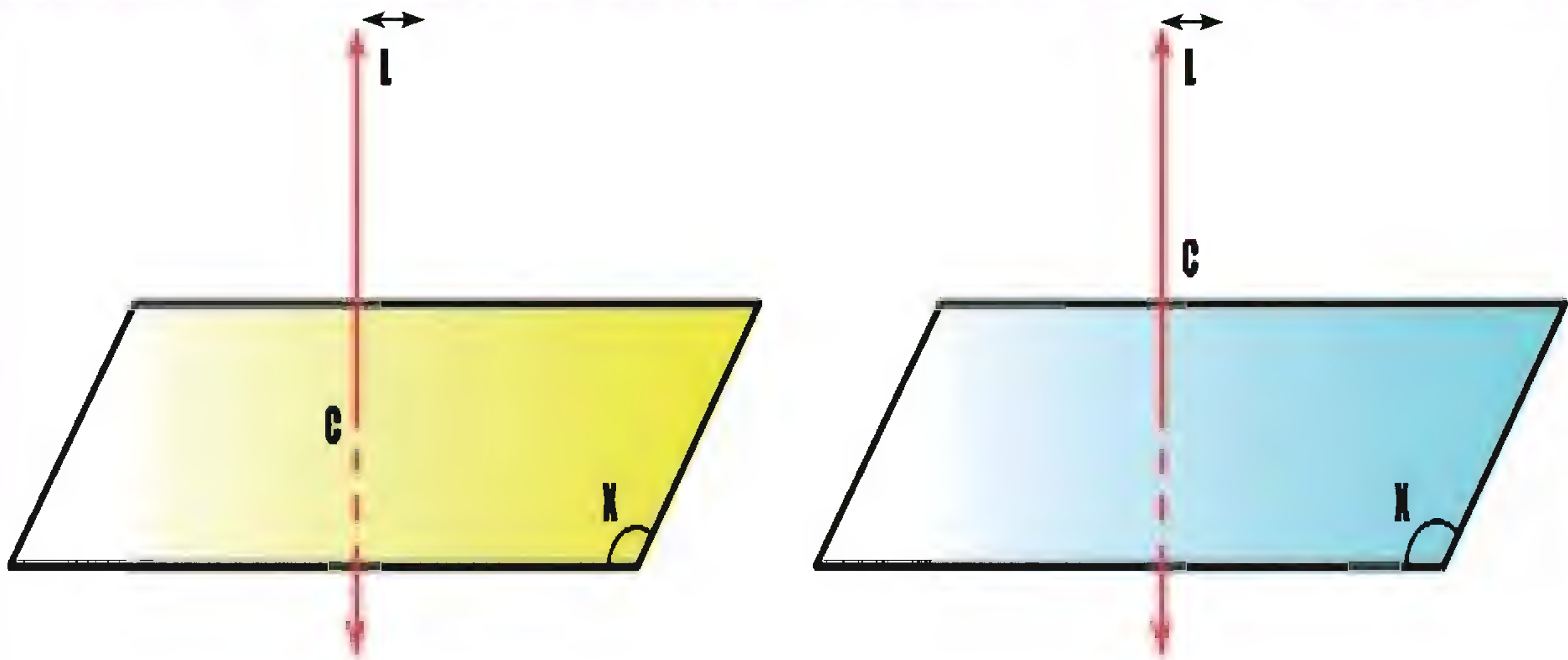
$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$$

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \text{ فيكون:}$$

وهو الشرط اللازم والكافي كي يكون المستقيم عمودي على المستوي.



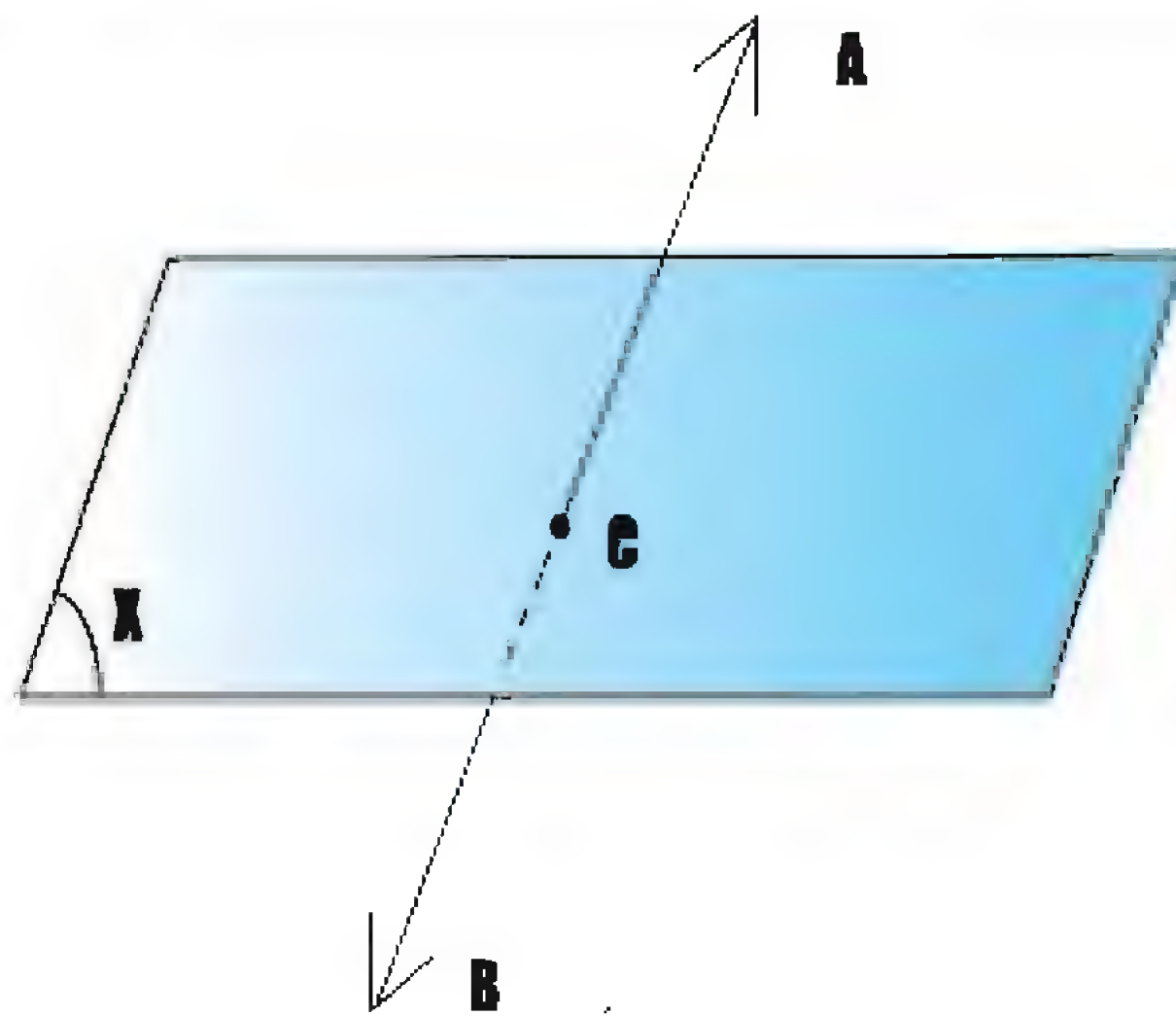
3 من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم



c نقطة أما  $c \in (X)$  أو  $c \notin (X)$

∴ يوجد مستقيم وحيد مثل  $\overleftrightarrow{L}$  يمر من نقطة c بحيث  $\overleftrightarrow{L} \perp (X)$

4 يكون المستقيم  $\overleftrightarrow{AB}$  مائلاً على المستوي (X) اذا كان قاطعاً له وغير عمودي عليه.



$$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{c\}$$

$\overleftrightarrow{AB}$  غير عمودي (X)

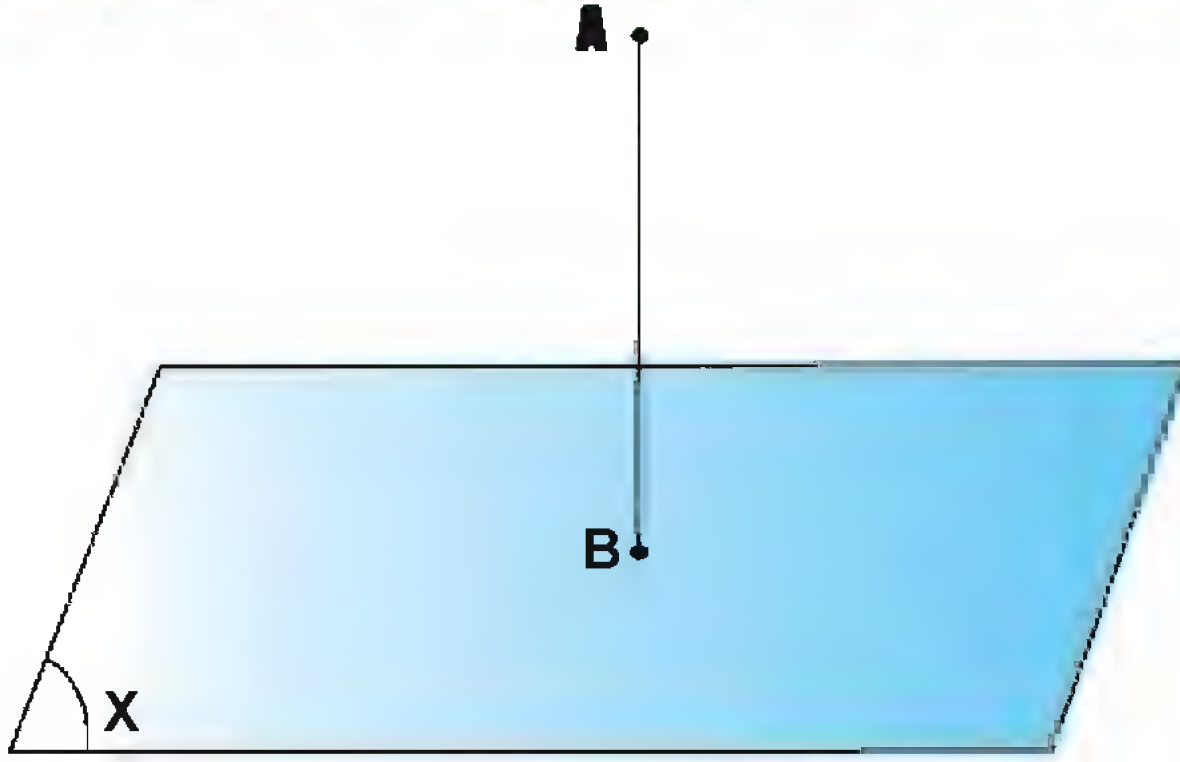
$\overleftrightarrow{AB}$  مائل على (X)



ملاحظة:

يكون  $\overleftrightarrow{AB}$  غير عمودي على (X) إذا كان مائلاً عليه أو موازياً له

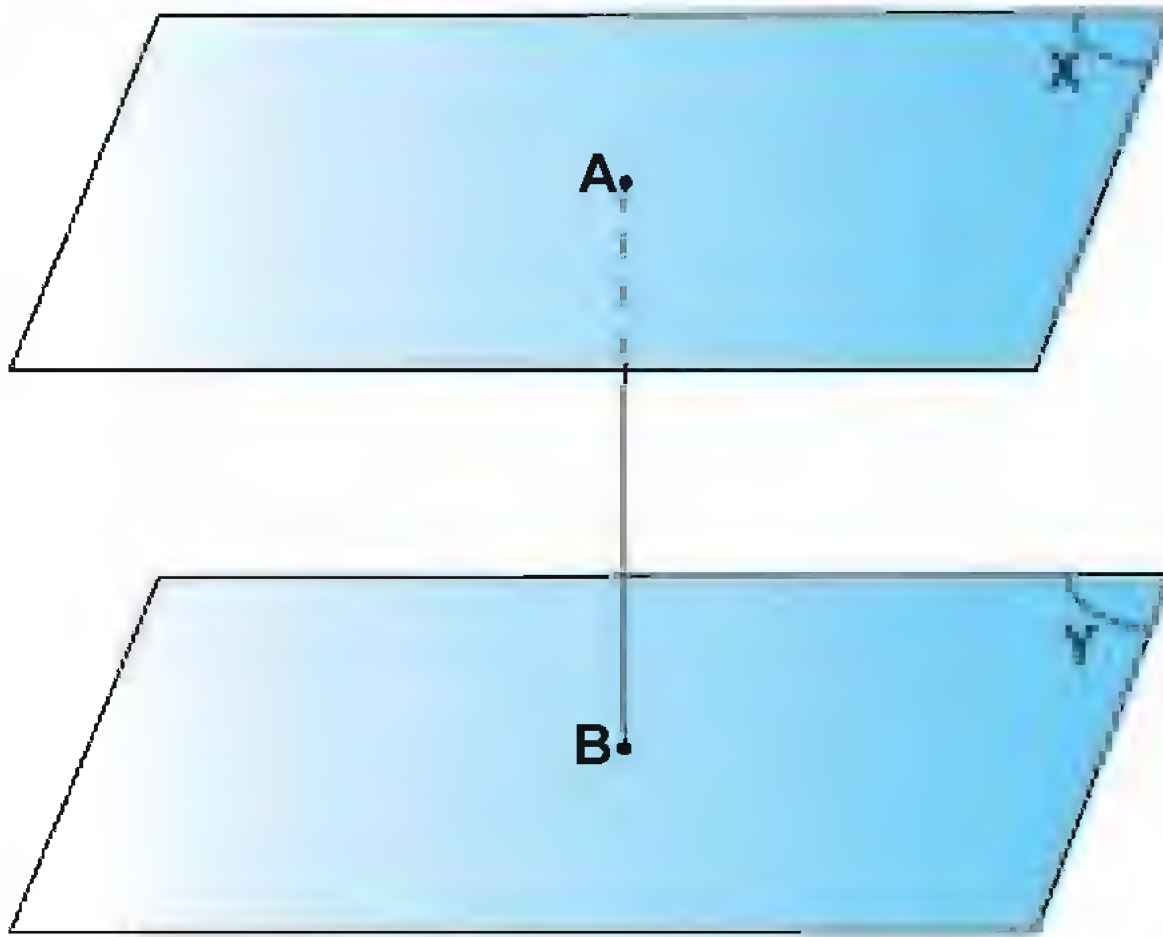
5 يقال لطول قطعة المستقيم المحددة بنقطة معلومة وأثر العمود النازل منها على المستوي المعلوم [بعد النقطة المعلومة عن المستوي]



AB هو بعد النقطة A عن (X)

وهو أقصر مسافة بين النقطة A و (X)

6 يقال لطول القطعة المستقيمة العمودية على مستويين متوازيين والمحددة بهما [البعد بين المستويين المتوازيين]



ملاحظة:

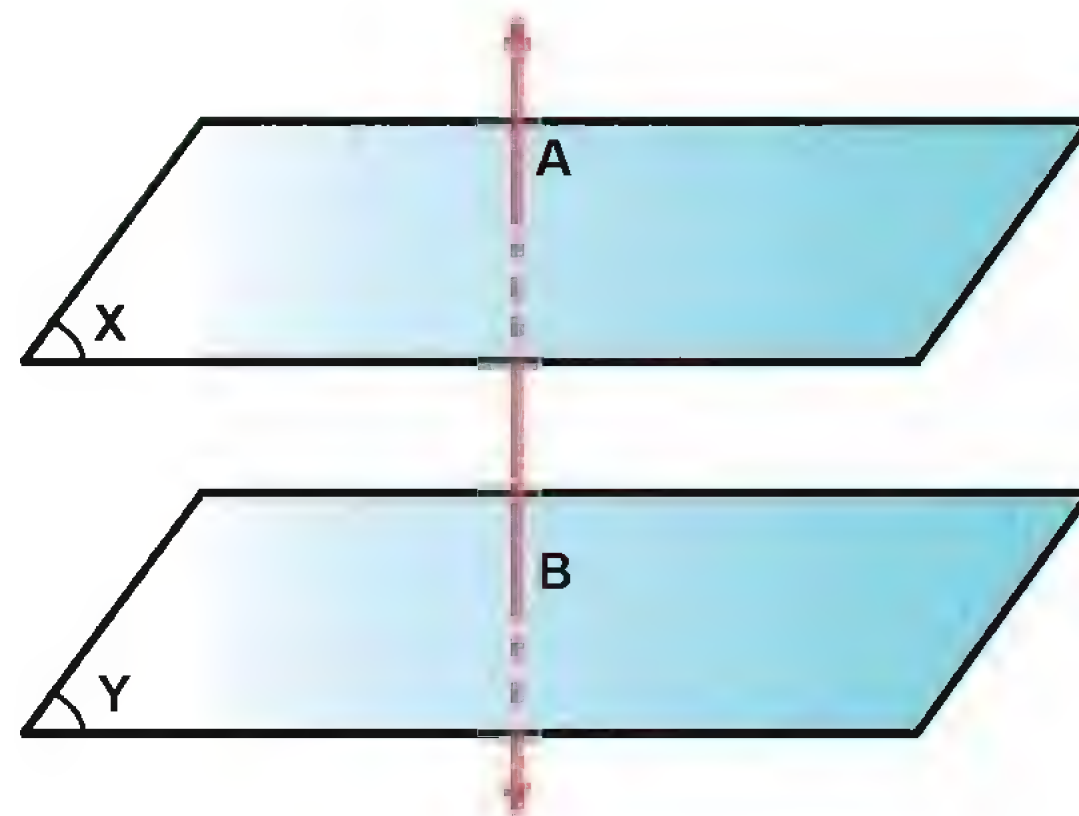
البعد بين مستويين متوازيين ثابت

$$(X) \parallel (Y), \overline{AB} \perp (X), \overline{AB} \perp (Y)$$

إذا كان

$\therefore AB$  يمثل البعد بين (X) ، (Y)

7 المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر

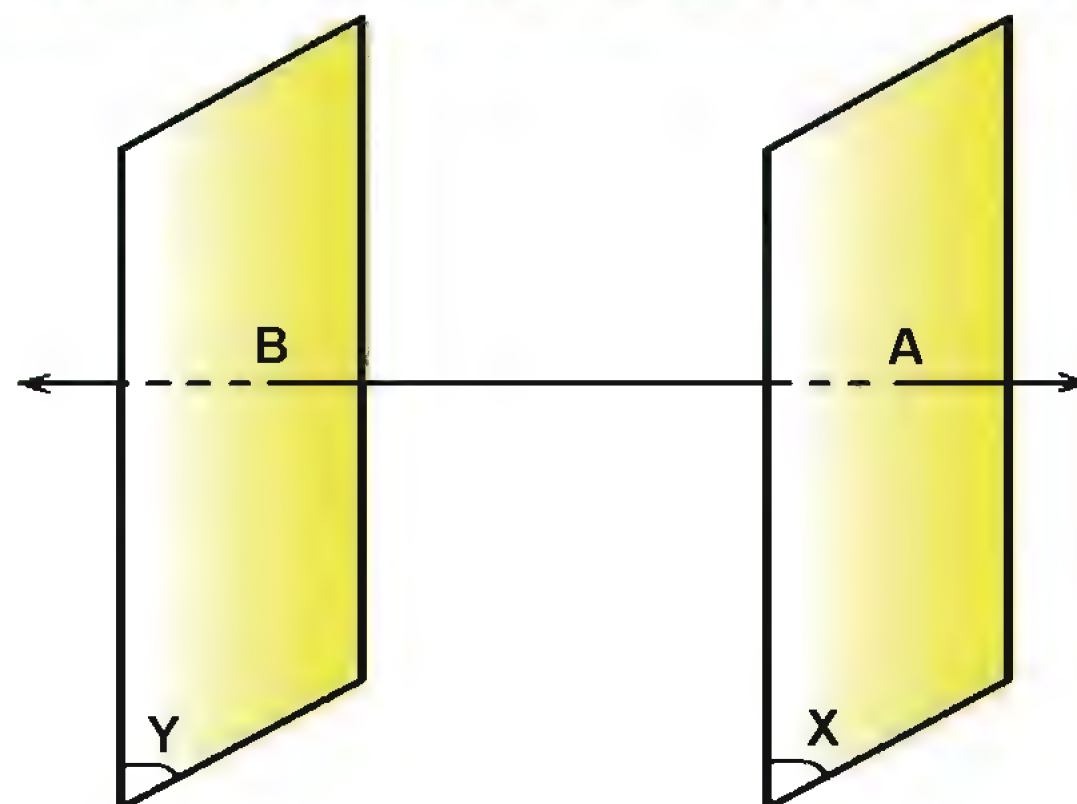


إذا كان

$$\begin{aligned} &(X) \parallel (Y) \\ &\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ &\overleftrightarrow{AB} \perp (Y) \end{aligned}$$

فان

8 المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان



إذا كان

$$\begin{aligned} &\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ &\overleftrightarrow{AB} \perp (Y) \end{aligned}$$

$$\therefore (X) \parallel (Y)$$

فان



# Theorem [7-8] مبرهنة (5):

المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر

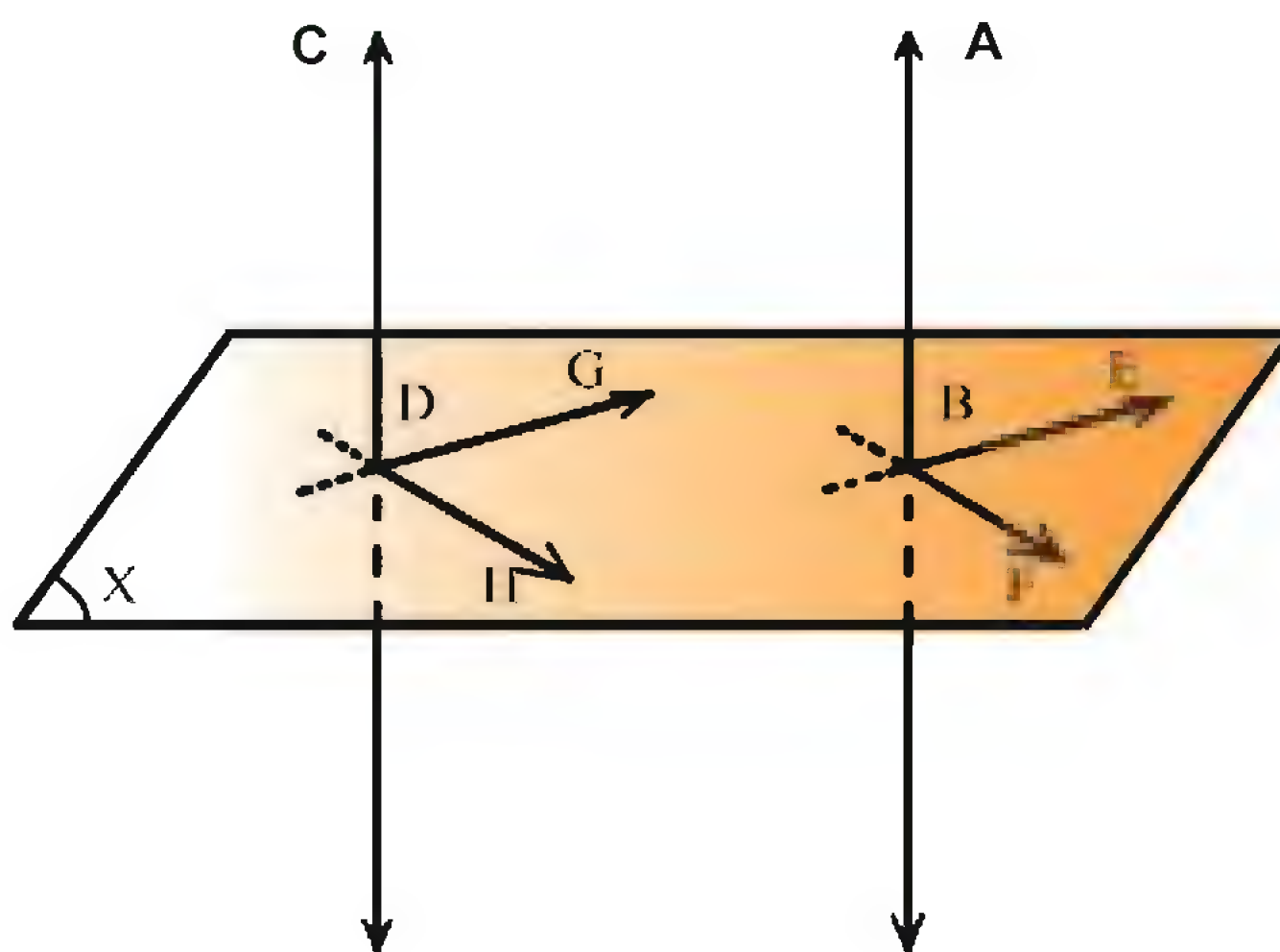
$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$$

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

المعطيات:

المطلوب اثباته:

البرهان:



(المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)  $\overleftrightarrow{CD} \cap (X) = \{D\}$

في (X) نرسم  $\overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{BF}$

ثم نرسم

$$\left. \begin{array}{l} \overleftrightarrow{DG} \parallel \overleftrightarrow{BE} \\ \overleftrightarrow{DH} \parallel \overleftrightarrow{BF} \end{array} \right\} \text{ (عبارة توازي)}$$

$$\therefore m \angle ABE = m \angle CDG$$

$$m \angle ABF = m \angle CDH$$

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{BF}$$

(إذا وازى ضلعاً زاوية ضلعي زاوية أخرى

تساوى قياسهما وتوازي مستواهما)

(العمود على مستوي يكون عمودياً على جميع

المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$$\therefore m \angle ABE = m \angle CDG = 90^\circ$$

$$m \angle ABF = m \angle CDH = 90^\circ$$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

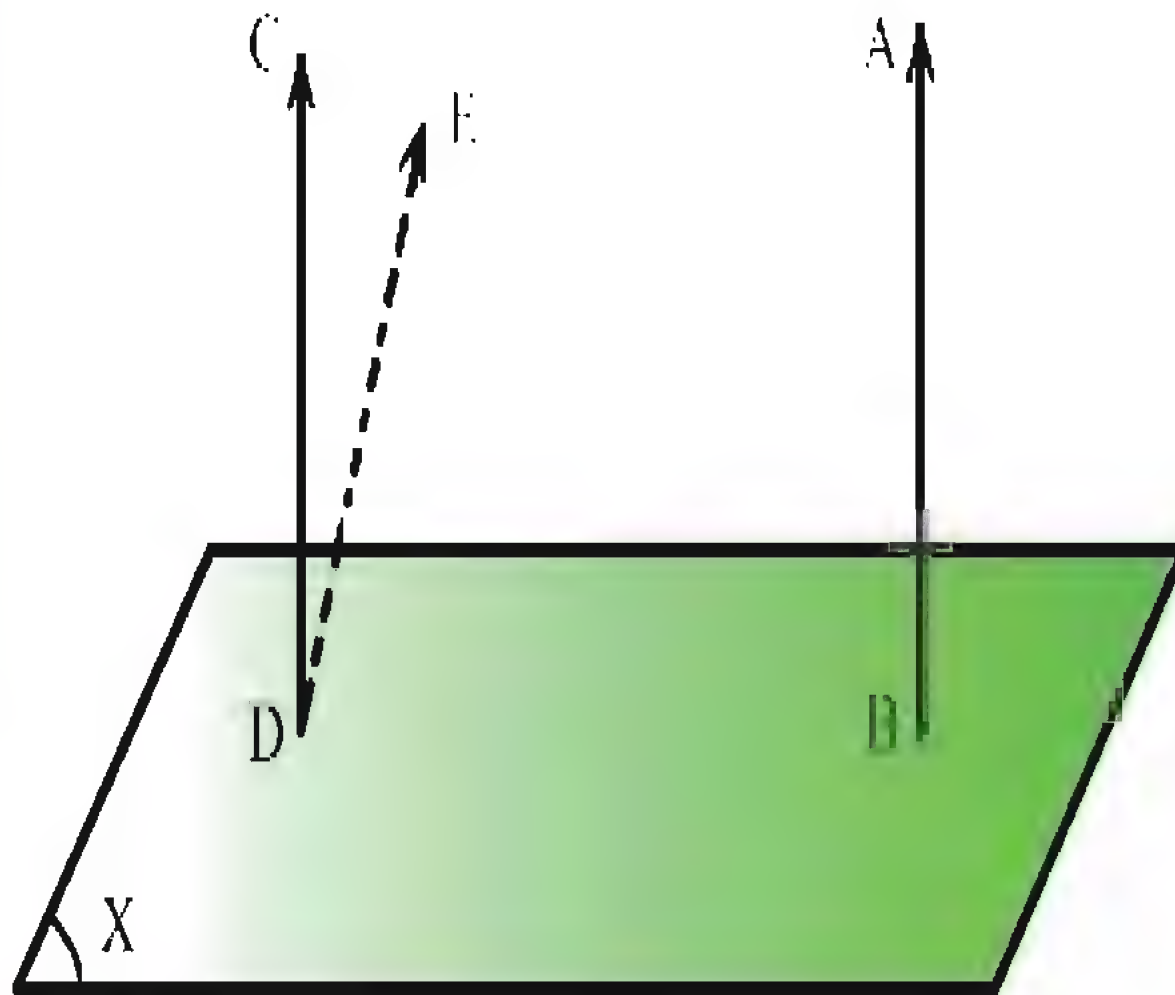
(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما

يكون عمودياً على مستويها)

البرهان

[7-8-1] نتيجة:

المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان



$$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

المعطيات:

المطلوب اثباته:

البرهان: ان لم يكن  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ,  
من  $D \in (X)$  نرسم  $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(يمكن رسم مستقيم وحيد مواز لآخر من نقطة لا تنتمي اليه)

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$$

(معطى)

$$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (X)$$

(المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

(معطى)

أصبح من نقطة D وجود مستقيمين عموديين على (X) وهذا غير ممكن  
(من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم)

$$\therefore \overleftrightarrow{DE} \equiv \overleftrightarrow{DC}$$

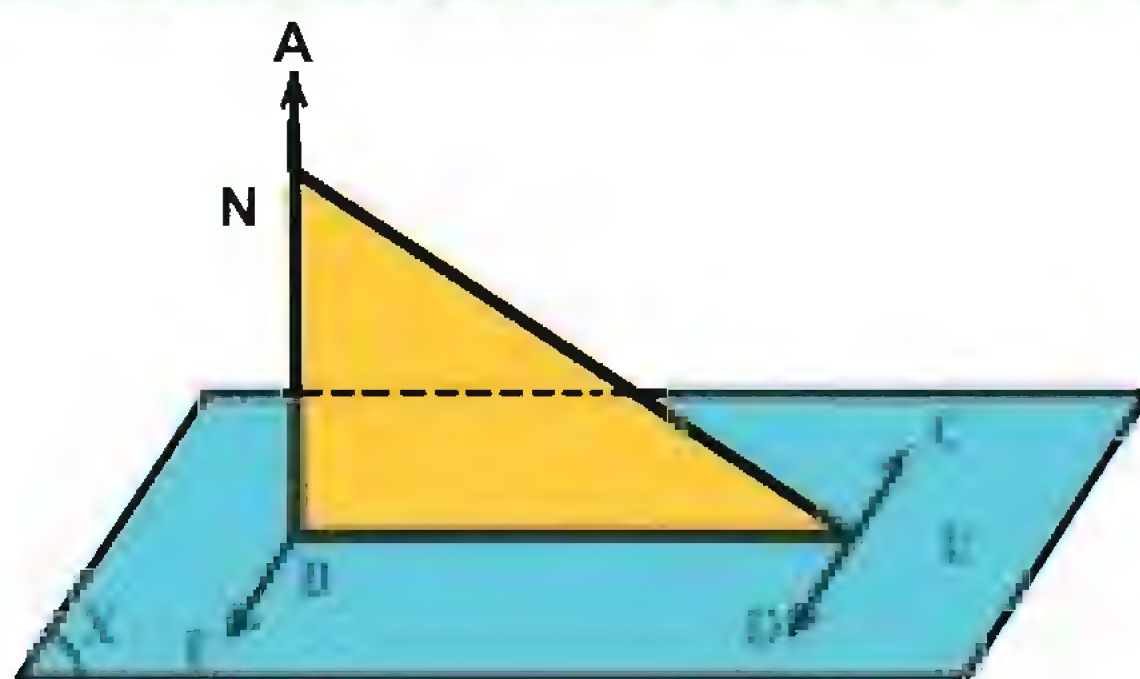
$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

النتيجة



## [7-9] مبرهنة (6) Theorem

**مبرهنة الأعمدة الثلاثة:** إذا رسم من نقطة في مستوي مستقيمان أحدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين أية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوي ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي.



$$B \in (X), \overleftrightarrow{CD} \subset (X), \overleftrightarrow{AB} \perp (X), \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

$$\forall N \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

**المعطيات :**

**المطلوب اثباته :**

**البرهان:** من نقطة B نرسم  $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  (عبارة توازي)

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (X) \text{ معطى}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \subset (X)$$

(إذا توازي مستقيمان فالمستوي الذي يحوي أحدهما ونقطة من الآخر يحتويها)

$$\therefore \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD} \text{ (معطى)}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{BE}$$

(في المستوي الواحد المستقيم العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (X) \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{NB} \perp \overleftrightarrow{BF}$$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمت المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)  
(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \perp (NBE)$$

(المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (NBE)$$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمت المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

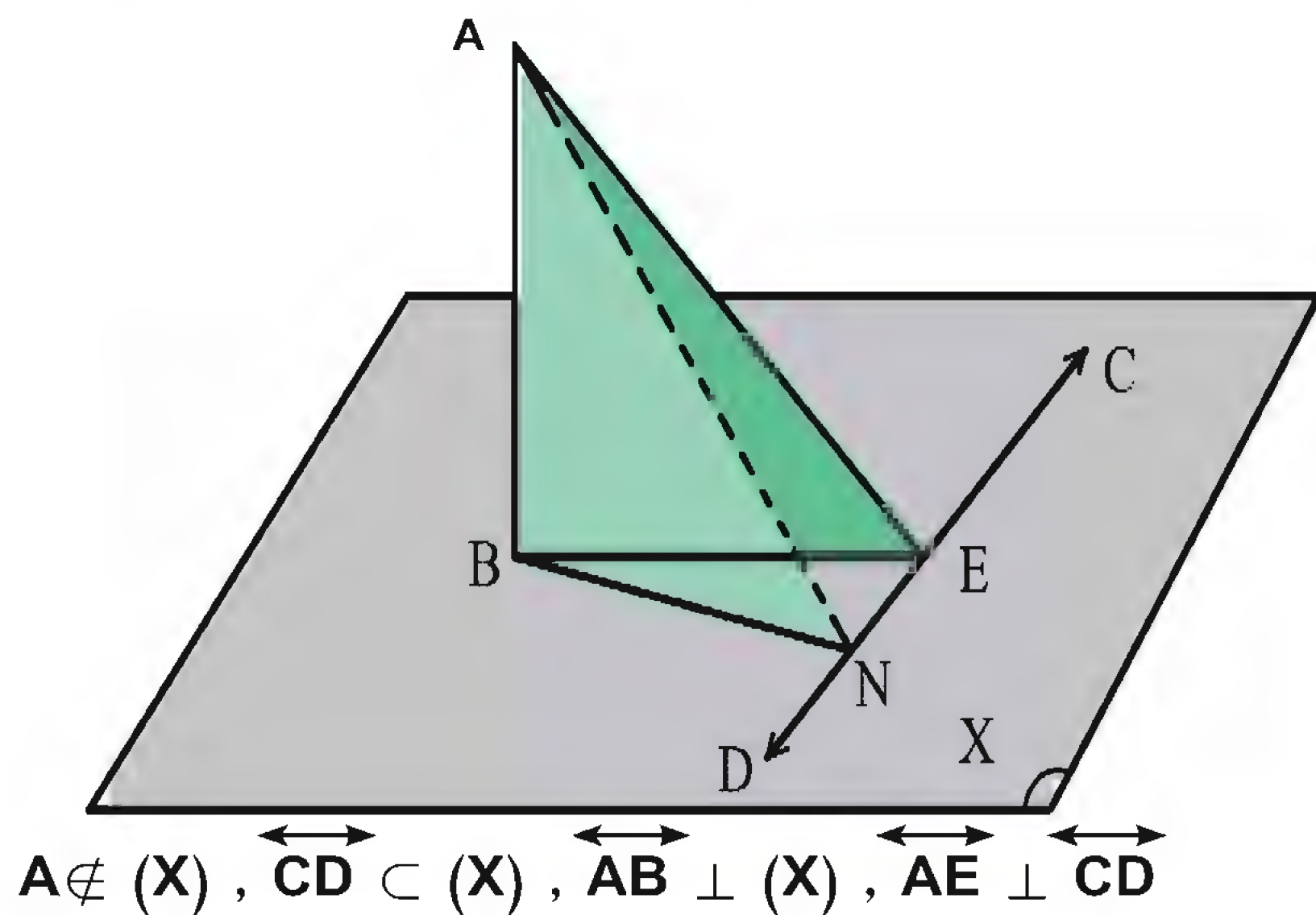
$$\therefore \overleftrightarrow{EN} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

وهذا شأن كل مستقيم يصل أية نقطة من نقاط  $\overleftrightarrow{AB}$  بالنقطة E يكون عمودياً على  $\overleftrightarrow{CD}$

ر . هـ . م

## نتيجة مبرهنة (6) الاعمدة الثلاثة

إذا رسم من نقطة لا تنتمي الى مستوي معلوم مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي. فالمستقيم الواصل بين أثري العمودين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي



المعطيات:

$$A \notin (X), \overleftrightarrow{CD} \subset (X), \overleftrightarrow{AB} \perp (X), \overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

$$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD} \quad \text{المطلوب اثباته:}$$

البرهان: إن لم يكن  $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$  من نقطة B نرسم  $\overleftrightarrow{NB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

(يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (X) \quad (\text{معطى})$$

$$\overleftrightarrow{AN} \perp \overleftrightarrow{CD} \quad (\text{مبرهنة الاعمدة الثلاثة})$$

$$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD} \quad (\text{معطى})$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AN} \equiv \overleftrightarrow{AE}$$

(يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$$\therefore N = E$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{BE} \equiv \overleftrightarrow{BN}$$

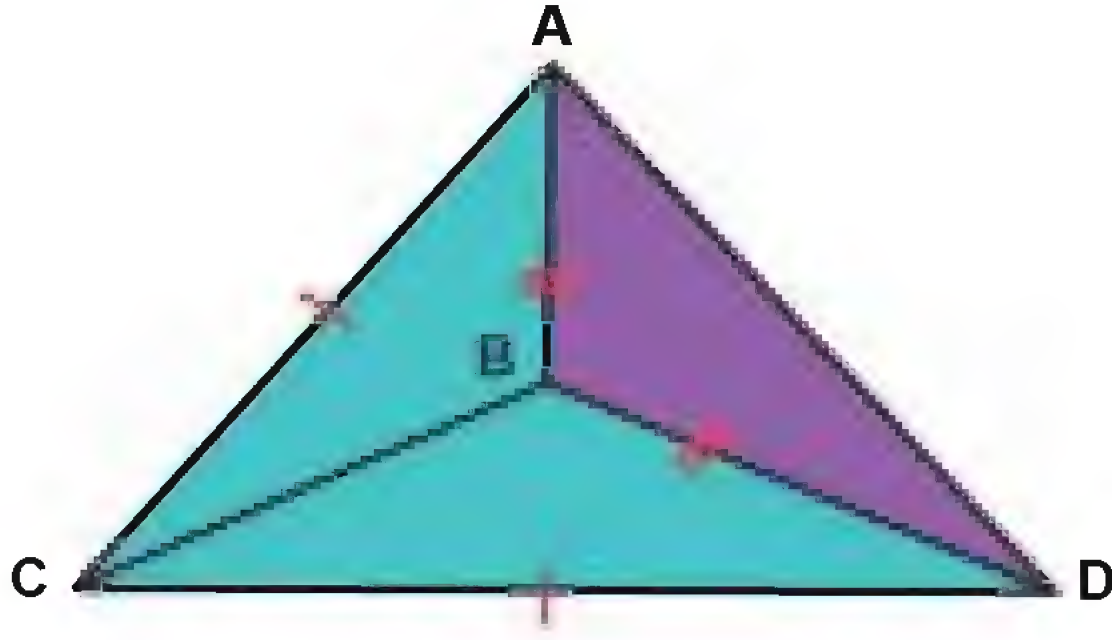
$$\therefore \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

و. ه. م



## أمثلة محلولة

١ مثلث  $BCD$  قائم الزاوية في  $B$  ،  $A$  نقطة ليست في مستوي هذا المثلث بحيث  $AC = CD$  ،  
 $AB = BD$  برهن أن  $\overline{BC}$  عمودي على مستوي المثلث  $ABD$



المعطيات:

المثلث  $BCD$  قائم الزاوية في  $B$

$A \notin (BCD)$  ،  $AB = BD$  ،  $AC = CD$

مطلوب اثباته:  $\overline{BC} \perp (ABD)$

البرهان: المثلثان  $BCD$  ،  $ABC$

$AB = BD$  (معطى)

$AC = CD$

$\overline{BC}$  مشترك

$\therefore$  يتطابق المثلثان (ثلاث أضلاع)

من التطابق ينتج

$m \angle CBD = m \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore \overline{BC} \perp \overline{BD}$

( $m \angle CBD = 90^\circ$ ) معطى

$\overline{BC} \perp \overline{AB}$

( $m \angle ABC = 90^\circ$ ) بالبرهان

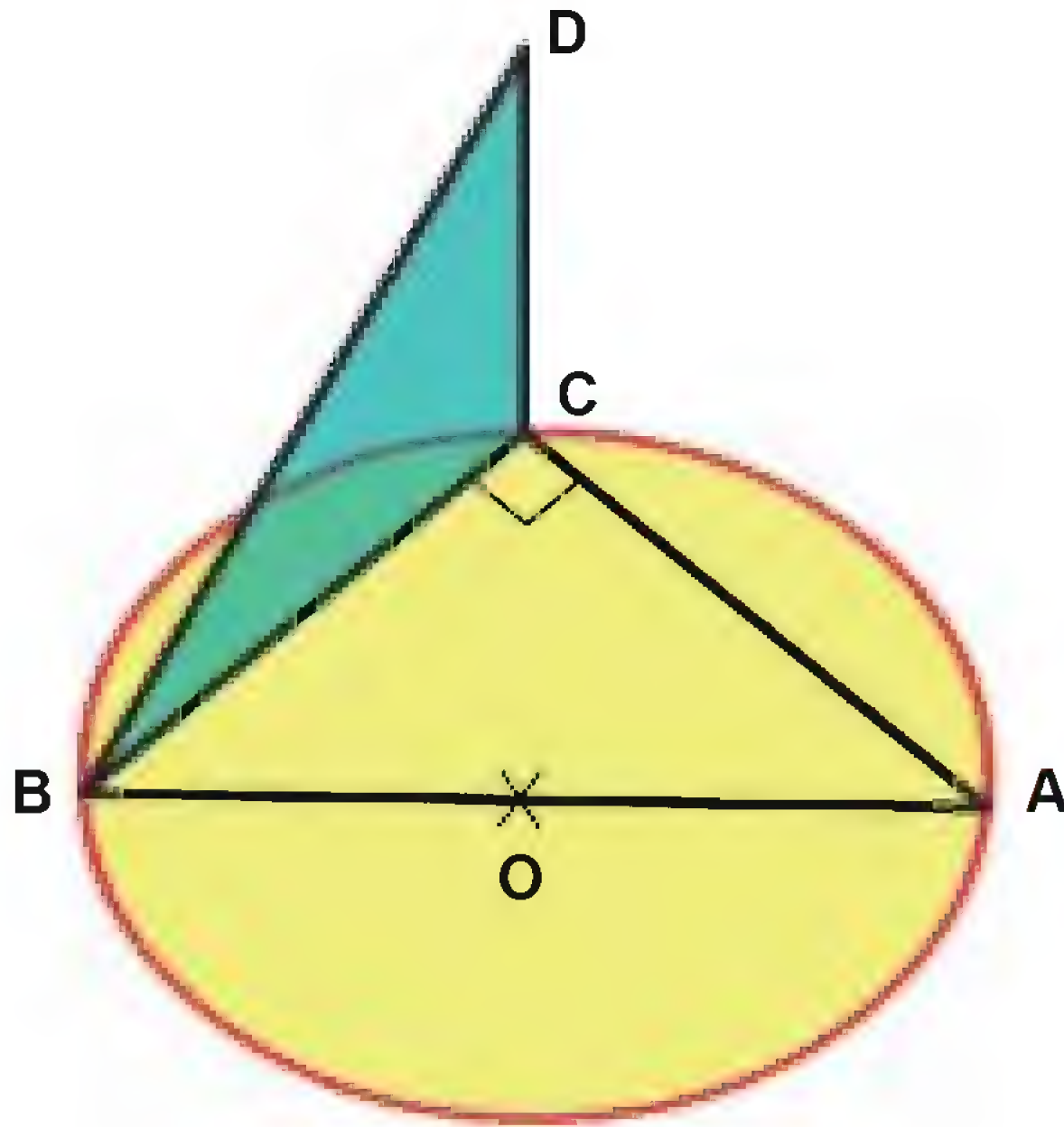
$\therefore \overline{BC} \perp (ABD)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة

تقاطعهما يكون عمودياً على مستويها )

و. ه. م

2 **AB** قطر في دائرة من نقطة مثل **C** على الدائرة رسم  $\overline{CD} \perp$  مستوي الدائرة برهن ان **AC** عمودي على المستوي (BCD)



**المعطيات:** **AB** قطر دائرة ، **C** نقطة على الدائرة ،  $\overline{CD}$  عمود على مستوي الدائرة

**المطلوب اثباته:**  $\overline{AC} \perp (BCD)$

**البرهان:**

$\therefore \overline{AB}$  ، قطر دائرة مركزها **O** (مطري)

(الزاوية المحيطية المرسومة في نصف قطر دائرة قائمة)  $\therefore \angle ACB = 90^\circ$

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$

اي ان  $\overline{CD} \perp (ABC)$  (مطري)

$\overline{AC} \perp \overline{CD}$

$\overline{AC} \perp (BCD)$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع

المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

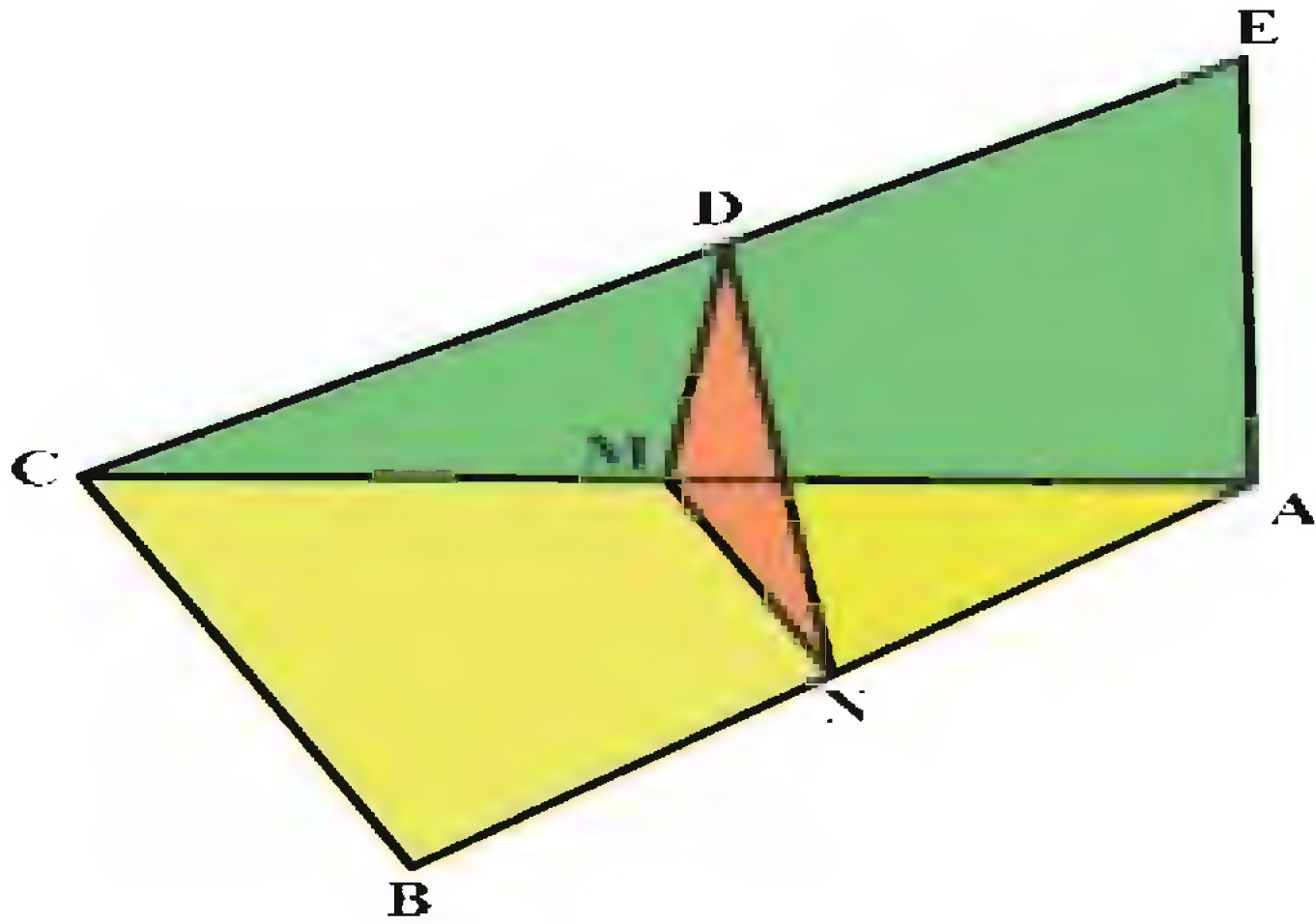
(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة

تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

**النتيجة**



مثث  $ABC$  قائم الزاوية في  $B$  ،  $\overline{AE} \perp (ABC)$  ، النقطة  $D$  منتصف  $\overline{CE}$  النقطة  $N$  منتصف  $\overline{AB}$  برهن على ان  $\overline{AB} \perp \overline{ND}$



**المعطيات :**  $ABC$  مثث قائم الزاوية في  $B$  ،  $\overline{AE} \perp (ABC)$  ،  $D$  منتصف  $\overline{CE}$  ،  $N$  منتصف  $\overline{AB}$

**المطلوب اثباته :**  $\overline{AB} \perp \overline{ND}$

**البرهان :** لتكن  $M$  منتصف  $\overline{AC}$

$\therefore D$  منتصف  $\overline{CE}$

$N$  منتصف  $\overline{AB}$  (معطى)

$$\overline{MD} \parallel \overline{AE}$$

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \overline{AE} \perp (ABC) \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \overline{MD} \perp (ABC)$$

( قطعة المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعي مثلث )

توازي الضلع الثالث )

(المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$$\therefore B \text{ زاوية قائمة (معطى)}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

(اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين متقاطعين  $90^\circ$

فان المستقيمين متعامدين)

$$\therefore \overline{MN} \perp \overline{AB}$$

(المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين

$$\therefore M \in (ABC)$$

يكون عمودي على الآخر)

$$\Rightarrow \overline{MD} \perp (ABC) , \overline{MN} \perp \overline{AB} , \overline{AB} \subset (ABC)$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \overline{ND}$$

(مبرهنة الاعددة الثلاثة)

و. ه. م

## تمارين (2-7)

1 /  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$  ،  $AB = 4\text{cm}$  ،  $BC = 3\text{cm}$

رسم  $\overline{CD} \perp (ABC)$  بحيث  $CD = 12\text{cm}$  جد طول  $AD$ .

2 / برهن على ان المستقيمين العموديين على مستويين متقاطعين لايتوازيان.

3 / في  $\triangle ABC$  ،  $m\angle A = 30^\circ$  ،  $\overline{BD} \perp (ABC)$  ،  $BD = 5\text{cm}$  ،  $AB = 10\text{cm}$

فإذا كان  $\overline{BH}$  عمودي على  $\overline{AC}$  جد قياس  $BHD$



مبدأ العد والتباديل والتوافيق Counting, Permutation and Combination

- [8-1] مبدأ العد
- [8-1-1] رمز المضروب .
- [8-2] التباديل .
- [8-2-1] قوانين التباديل .
- [8-3] التوافيق .
- [8-3-1] قوانين التوافيق .
- [8-4] عدد طرق سحب عينة عناصرها (r) من مجموعة عدد عناصرها (n) .
- [8-5] نسبة الاحتمال .
- [8-5-1] قوانين الاحتمالات .
- [8-6] مبرهنة ذات الحدين .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
رمز مضروب n	$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
التباديل	$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$
التوافيق	$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$
نسبة الاحتمال	$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$
مبرهنة ذات الحدين	$(a+b)^n$
قانون الحد العام	$P_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$

## الفصل الثامن

### [8-1] مبدأ العد Counting Method

إذا أمكن إجراء عملية باحدى الطرق المختلفة عددها (m) وكان لدينا في الوقت نفسه عملية أخرى يمكن إجراؤها بطرق عددها (n) فإن عدد الطرق التي يمكن بها إجراء العمليتين معاً يساوي:  $m \times n$

#### مثال 1

يوجد لدى صاحب مخزن ثلاثة انواع من الدراجات الهوائية ومن كل نوع يوجد أربعة احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات؟

الحل:

$$\text{عدد الدراجات} = 3 \times 4 \times 6$$

$$72 = \text{دراجة}$$

#### مثال 2

كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام :  
{1 , 2 , 5 , 7 , 8 , 9}

التكرار مسموح

التكرار غير مسموح

الحل:

التكرار مسموح

$$\text{عدد اختيارات الرقم الاول} = 6$$

$$\text{عدد اختيارات الرقم الثاني} = 6$$

$$\text{عدد اختيارات الرقم الثالث} = 6$$

$$\text{عدد الاعداد} = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

التكرار غير مسموح

$$\text{عدد اختيارات الرقم الاول} = 6$$

$$\text{عدد اختيارات الرقم الثاني} = 5$$

$$\text{عدد اختيارات الرقم الثالث} = 4$$

$$\text{عدد الاعداد} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$



### مثال 3

كم عدد رمزه مكون من رقمين وأصغر من (40) يمكن تكوينه باستخدام الأرقام :  
 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

أ تكرار الرقم مسموح في العدد نفسه

ب تكرار الرقم غير مسموح في العدد نفسه

الحل :

أ عدد اختيارات رقم العشرات = 3

عدد اختيارات رقم الاحاد = 5

عدد الاعداد =  $5 \times 3 = 15$

ب عدد اختيارات رقم العشرات = 3

عدد اختيارات رقم الاحاد = 4

عدد الاعداد =  $3 \times 4 = 12$

### مثال 4

كم عدد رمزه مكون ثلاثة مراتب واكبر من 500 يمكن تكوينه من الأرقام  
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

أ تكرار الرقم مسموح

ب تكرار الرقم غير مسموح

الحل :

أ عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 7

عدد اختيارات رقم الاحاد = 7

عدد الاعداد =  $7 \times 7 \times 3 = 147$

ب عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 6

عدد اختيارات رقم الاحاد = 5

عدد الاعداد =  $5 \times 6 \times 3 = 90$

### [8-1-1] رمز المضروب

يظهر في احيان كثيرة في الرياضيات ضرب الاعداد الصحيحة الموجبة من العدد (n) حتى (1)

ويرمز له  $n! = \underline{n}$  ويقرأ مضروب n

$$n! = n (n - 1) (n - 2) \dots 1$$

مثال 1

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ملاحظة :

أتفق على ان :

$$1! = 1$$

وان

$$0! = 1$$

مثال 2

$$\text{اذا كان } \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30 \text{ جد قيمة } (n)$$

الحل :

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30 \quad \therefore \frac{(n+1) n (n-1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$(n+1) n = 30$$

$$n^2 + n - 30 = 0$$

$$(n-5) (n+6) = 0$$

يهمل لان n يجب ان تكون عدد صحيح موجب  $\therefore n = 5$  ,  $n = -6$



### مثال 3

إذا كان  $n! = 5040$  فما قيمة  $n$  ؟

الحل :

$$\begin{aligned} n! &= 5040 \\ \therefore n! &= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ n! &= 7! \\ \therefore n &= 7 \end{aligned}$$

5040	1
5040	2
2520	3
840	4
210	5
42	6
7	7
1	

### [8-2] التباديل (permutation)

يسمى وضع  $n$  من الأشياء في ترتيب معين بانه تبديل لهذه الأشياء (بشرط ان تأخذ جميع هذه الأشياء) وتقرأ تبديل  $n$  مأخوذ منه  $r$  ويرمز للتباديل

$P^n_r$  أو  $P(n, r)$

#### [8-2-1] قوانين التباديل

$$1. P^n_r = P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

حيث  $r < n$

$$2. P^n_n = n! = n(n-1)(n-2) \dots 1$$

$$3. P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$4. P^n_0 = 1$$

### مثال 1

احسب  $p_3^8$

الحل :

$$p_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336 \quad (\text{حسب القانون الثالث})$$

\* ويمكن حل المثال حسب القانون الاول كما يلي : -

$$p_3^8 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

### مثال 2

احسب  $p_4^4$

الحل :

$$p_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad (\text{حسب القانون الثاني})$$

### مثال 3

احسب  $p_0^5$

الحل :

$$p_0^5 = 1 \quad (\text{حسب القانون الرابع})$$

ويمكن توضيح ذلك حسب القانون الثالث

$$p_0^5 = \frac{5!}{(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

### مثال 4

جد عدد التباديل للحروف أ ، ب ، ج - المأخوذة منها اثنين في كل مرة

الحل :

$$p_2^3 = 3 \times 2 = 6$$



### مثال 5

ما عدد طرق توزيع (4) اشخاص على (4) وظائف شاغرة بحيث كل شخص له فرصة عمل متساوية مع الآخرين ؟

الحل :

$$p_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad \text{عدد الطرق}$$

### مثال 6

بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة اشخاص في حفل ان يرتبوا انفسهم بحيث يجلسون في صف مستقيم به سبعة مقاعد ؟

الحل :

$$p_7^7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 \quad \text{عدد الطرق}$$

### مثال 7

جد قيمة (n) اذا كان  $p_2^n = 90$

الحل :

$$p_2^n = 90$$

$$n(n-1) = 90$$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n - 10)(n + 9) = 0$$

$$\Rightarrow n = 10 , n = -9 \quad \text{يهمل}$$

### Combination [8-3] التوافيق

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء مأخوذة كلها أو بعضها بصرف النظر عن ترتيبها ويرمز لها

$$C_r^n = \binom{n}{r} = C(n, r)$$

#### [8-3-1] قوانين التوافيق

$$1. C_r^n = \frac{p_r^n}{r!}$$

$$2. C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

$$3. C_r^n = C_{n-r}^n$$

$$4. C_n^n = C_0^n = 1$$

$$5. C_1^n = n$$

مثال 1

أحسب كل من

$$1. C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \quad \text{حسب القانون الاول}$$

$$2. C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

مثال 2

كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من (6) أشخاص ؟

الحل:

$$C_3^6 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

مثال 3

إذا كان عدد أسئلة امتحان مادة الرياضيات هو (8) أسئلة المطلوب حل (5) أسئلة فقط. بكم

طريقة يمكن الأجابة ؟

الحل:

$$C_5^8 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$



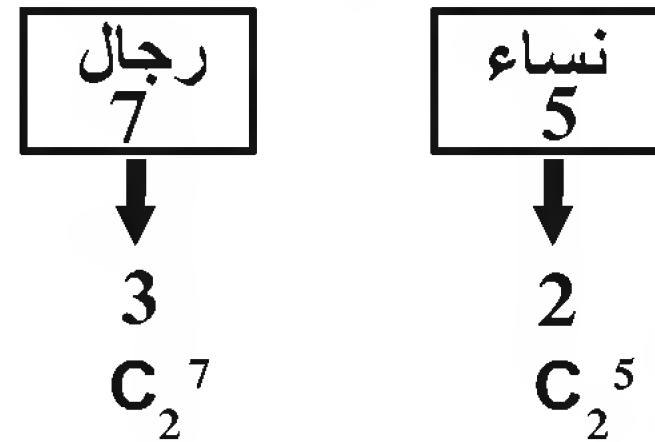
#### مثال 4

بكم طريقة يمكن اختبار لجنة من ثلاثة رجال وسيدتين من بين (7) رجال و (5) سيدات ؟

الحل:

يمكن اختيار ثلاثة رجال من بين سبعة رجال بطرق عددها  $C_3^7$  ويمكن اختيار السيدتين من بين خمسة سيدات بطرق عددها  $C_2^5$  إذن اختيار اللجنة بطرق عددها

$$C_3^7 \times C_2^5 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 350$$



#### مثال 5

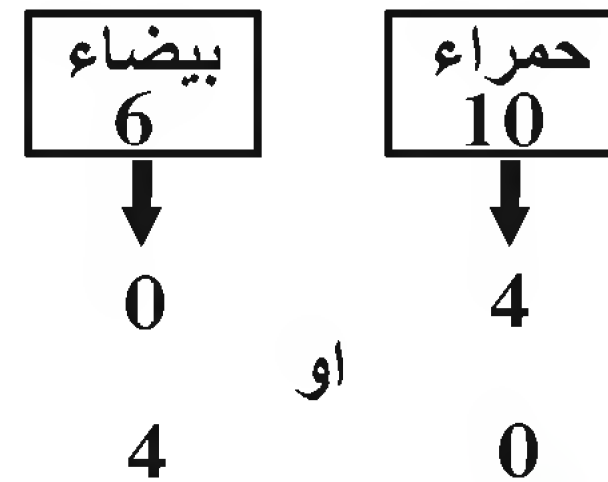
كيس فيه (10) كرات حمراء و (6) كرات بيضاء سحبت منه (4) كرات معاً. ما عدد الطرق

التي تكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون ؟

الحل:

$$C_4^{10} + C_4^6 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 210 + 15 = 225 \text{ عدد الطرق}$$



او

#### مثال 6

اثبت ان :

$$\binom{70}{3} = \binom{70}{67}$$

حسب القانون الثالث

الحل:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\therefore \binom{70}{3} = \binom{70}{70-3}$$

$$= \binom{70}{67}$$

## مثال 7

جد قيمة  $(n)$  اذا كان  $C_2^n = 55$

الحل:

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2 \times 1}$$

$$\therefore \frac{n(n-1)}{2} = 55$$

$$n(n-1) = 110$$

$$n^2 - n - 110 = 0$$

$$(n - 11)(n + 10) = 0$$

$$\Rightarrow n = 11, n = -10 \text{ يهمل}$$

[8-4] عدد طرق سحب عينة عدد عناصرها  $(r)$  من مجموعة عدد عناصرها  $(n)$

حيث  $n \in \mathbb{N}^+, n \geq 1, r \leq n$

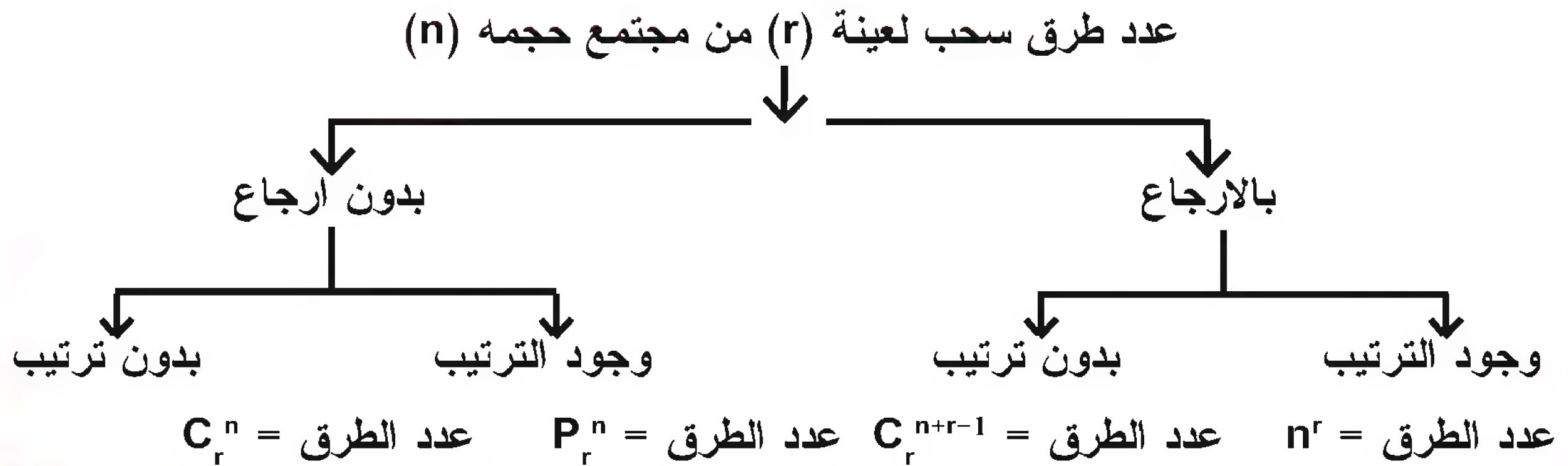
## ملاحظة:

عند السحب يجب مراعاة الآتي:

1. السحب بالارجاع يعني ان كل عينة تسحب تعاد الى المجموعة الاصلية قبل الشروع بسحب عينة اخرى.

2. السحب بدون ارجاع: يعني ان العينة التي تسحب لا تُعاد مره اخرى الى المجموعة الاصلية.

والمخطط الآتي يوضح عملية السحب :-





إذا لم تذكر طريقة السحب فتعتبر دون أرجاع ولا وجود للترتيب

## مثال ٨

بكم طريقة يمكن سحب (3) كرات من وعاء به (7) كرات

أ. مع الأرجاع ومراعاة الترتيب

ب. مع الأرجاع وعدم الترتيب

ج. دون أرجاع ومراعاة الترتيب

د. دون أرجاع وعدم مراعاة الترتيب

الحل:

أ. عدد الطرق

$$n^r = 7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$$

ب. عدد الطرق

$$C_r^{n+r-1} = C_3^{7+3-1} = C_3^9 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

ج. عدد الطرق

$$P_3^7 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

د. عدد الطرق

$$C_3^7 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

## تمارين (1-8)

1 في معرض للسيارات توجد (5) أنواع من السيارات ومن كل نوع (3) نماذج ومن كل نموذج توجد (4) سيارات فما عدد السيارات في المعرض ؟

2 كم عدد زوجي يمكن تكوينه من أربع مراتب مأخوذة من الأرقام { 5,1,6,2,7,4,8 }

أ التكرار مسموح به في العدد نفسه .

ب التكرار غير مسموح به في العدد نفسه .

3 صندوق يحتوي على عشرة مصابيح (4) منها عاطلة سحبت ثلاثة مصابيح جد عدد طرق سحب

أ اثنين صالحة وواحد عاطل .

ب على الأقل مصباح صالح .

4 إذا كان عدد أسئلة امتحان مادة ما هو (8) أسئلة وكان المطلوب حل خمسة أسئلة منها فقط

بشرط أن تكون ثلاثة منها من الأسئلة الأربعة الأولى. فبكم طريقة يمكن الإجابة؟

5 ما عدد الطرق لاختيار فريق لكرة الطائرة من (6) لاعبين من بين (11) لاعب. [الاختيار دون

أرجاع وعدم مراعاة الترتيب]

6 كم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من خمسة أشخاص على شرط أن تحتوي على (3) طلاب و

(2) طالبة من بين (7) طلاب و (6) طالبات

أ استبعاد أحد الطلاب من اللجنة

ب إحدى الطالبات لا يحق لها المشاركة في اللجنة.

7 جد قيمة (n) إذا كان

1  $P_2^n = 72$       2  $(n_2) = 10$       3  $2(n_2) = (3^{n+1})$

8 كم عدد رمزه مكون من ثلاثة مراتب واصغر من 600 يمكن تكوينه من الأرقام

{ 5 , 3 , 6 , 2 , 7 , 9 }

أ يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

ب لا يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

9 إذا كان { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 } x فكم عدد رمزه مكون من (5) أرقام

مختلفة يمكن تكوينه من عناصر x؟



### نبذة تاريخية :-

في منتصف القرن السابع عشر ومن خلال الابحاث التي قام بها كل من باسكال ( pascal ) وفيرمات ( Fermat ) عند دراستهم لأرقام معينة في عالم المراهنة نشأت ((نظرية الاحتمالات )) واصبحت الآن تكتسب اهمية كبيرة في مجالات متعددة مثل الارصاد الجوية ، العلوم الهندسية ، التأمين ، الطب الحيوي حيث نظرية الوراثة تعتبر افضل تطبيق لنظرية الاحتمالات في هذا المجال والتي جاءت عن طريق ( العالم مندل ) .

### بعض المفاهيم الأساسية :

- 1 - التجربة (Experiment) : هو القيام بفعل معين ثم ملاحظة جميع ما ينتج عن هذا الفعل .
- 2 - التجربة العشوائية (Random Experiment) : وهي التجربة التي تحقق الشرطين التاليين:-

أ. يمكن لنا ان نصف جميع نواتج التجربة قبل وقوعها

ب. لا يمكن تحديد اي من النواتج ، يمكن ان يتحقق فعلاً في حالة حدوث التجربة

مثال 1

رمي حجر النرد (Dice) مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهري ، نعلم مسبقاً ان الوجه الظاهري في الرمية سيكون احد الارقام 1,2,3,4,5,6 اي يمكن تحديد جميع النتائج الممكنة لكن من غير الممكن تحديد النتيجة بعينها لذا سميت هذه التجربة بالتجربة العشوائية

### فضاء العينة sample spaces

فضاء العينة في تجربة عشوائية هو جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة ويرمز له  $S$

يرمز الى عدد عناصر الفضاء بالرمز  $n(s)$

ففي المثال الاول السابق

فضاء العينة  $s = \{1,2,3,4,5,6\}$

عدد عناصر الفضاء  $n(s) = 6$

## الحدث (Event)

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة  $A$  , حدث من فضاء العينة  $S \Rightarrow A \subseteq S$

## الاحداث الشاملة

لتكن  $A$  ,  $B$  ,  $C$  أحداث من فضاء العينة  $S$  يقال لهذه الاحداث شاملة اذا حققت الشروط التالية:

- 1 اتحاد الاحداث  $S =$  فضاء العينة
- 2 تقاطعها مثنى مثنى ( كل اثنين منهما )  $= \emptyset$
- 3 كل مجموعة منها ليست خالية

## مثال 2

ليكن  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$  نأخذ بعض الاحداث من

$A_1 = \{4,1\}$  حدث مركب (Compound Event)

لان عدد عناصره اكبر من ( 1 )

$A_2 = \{3\}$  حدث بسيط (Simple Event)

لان عدد عناصره = 1

$A_3 = \{6\}$  بسيط

$A_4 = \{1,2,3,4,5\}$  مركب

$A_5 =$  عدد يقبل القسمة على 2,5 في نفس الوقت  $\Rightarrow A_5 = \emptyset$

$A_5 =$  حدث مستحيل (Impossible Event)

$A_6 = \{5,2\}$  مركب

$A_7 = \{6,5,3,2\}$  مركب

$A_8 = \{1,3,4,2,5,6\}$  حدث مؤكد (Sure Event) لان  $A_8 = S$

نلاحظ  $A_1, A_7$  احداث شاملة من  $S$



## العمليات على الحوادث

- 1  $A \subseteq S$  معناه  $A$  حدث من  $S$
- 2  $\emptyset$  تسمى بالحدث المستحيل (الحدث الذي لا يمكن وقوعه)
- 3  $S$  فضاء العينة = الحدث المؤكد (( يقع دائماً ))
- 4  $A^c = S - A$  يسمى الحدث المكمل للحدث  $A$  ( او عدم وقوع الحدث  $A$  )  
 $A^c = \text{Complement Event}$
- 5  $B \cup A$  يعني حدث وقوع الحدث  $A$  أو  $B$  اي حدث وقوع احد الحدثين على الاقل .
- 6  $B \cap A$  يعني حدث وقوع الحدث  $A$  و  $B$  اي حدث وقوع الحدثين معاً
- 7  $A \subseteq B$  يعني حدث وقوع الحدث  $A$  يستلزم وقوع الحدث  $B$
- 8  $A \cap B = \emptyset$  ،  $A$  ،  $B$  حدثين متنافيين Mutually Exclusive Events
- 9 الحدث الذي يتكون من عنصر واحد يسمى حدث بسيط.
- 10 الحدث الذي يتكون من عنصرين او اكثر يسمى حدث مركب.

## ملاحظة :

إذا كانت تجربة مركبة من تجربتين متتاليتين وكان فضاء العينة الاولى  $s_1$  والثانية  $s_2$  فإن

$$1 \text{ فضاء العينة للتجربة المركبة } = s_2 \times s_1 \text{ (حاصل ضرب ديكارتي)}$$

$$2 \text{ } n(s_2) \times n(s_1) = n(s) \text{ (( مبدأ العد))}$$

## مثال 3

التجربة : القاء حجر نرد ثم قطعة نقود ثم حجر نرد مرة اخرى التجربة هنا مركبة من التجارب الثلاث الاتية :

الحل :

$$s_1 = \{1,2,3,4,5,6\} \text{ حجر النرد الاول}$$

$$s_2 = \{H,T\} \text{ حيث الصورة } H = (\text{Head}) , \text{ الكتابة } T = (\text{Tail})$$

$$s_3 = \{1,2,3,4,5,6\} \text{ حجر النرد الثاني}$$

$$\text{فإن } s = s_1 \times s_2 \times s_3 \text{ (يمثل فضاء العينة للتجربة المركبة)}$$

$$\therefore \text{ عدد عناصر فضاء العينة للتجربة المركبة } (s) = n(s_1) \times n(s_2) \times n(s_3)$$

$$n(s) = 6 \times 2 \times 6 = 72 \text{ ثلاثي مرتب}$$

## تمارين (2-8)

1 رمينا حجرين من احجار النرد جد

أ عدد عناصر فضاء العينة  $n(s)$  .

ب اكتب فضاء العينة  $s$  .

ج اكتب الحدث الذي قيمة مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر او يساوي 9 .

د اكتب الحدث الذي قيمة مجموع العددين على وجهي الحجرين يقبل القسمة على 6 بدون باقٍ

ه اكتب الحدث الذي قيمة العدد الذي على وجه احد الاحجار ضعف العدد الذي على وجه الحجر

الاخر .

2 من رمي حجر نرد مرة واحدة اكتب الاحداث الاتية ثم بين اي الحدثين منهما متنافيين

أ الحدث ظهور عدد اولي

ب الحدث ظهور عدد زوجي

ج الحدث ظهور عدد فردي

3 رميت ثلاث قطع نقود مرة واحدة

أ صف فضاء العينة

ب جد الحدث وجه واحد على الاقل صورة (H)

ج ظهور على الاكثر كتابة (T)



ليكن  $A$  حدث من  $s$  حيث  $s$  فضاء ذي احتمالات متساوية فضاء منتظم  $uniform\ spaces$

### [8-5] نسبة الاحتمال Probability Ratio

$P =$  الاحتمال

نسبة احتمال حدوث الحدث  $A =$  عدد عناصر  $A$  / عدد عناصر الفضاء

$$p(A) = n(A) / n(s)$$

### [1-5-8] قوانين الاحتمالات :

ليكن كل من  $A, B$  حدثين من  $s$

$$0 \leq p(A) \leq 1 \quad \text{حيث}$$

$$P(A) = 0 \quad \text{إذا كان } A \text{ حدثاً مستحيلاً}$$

$$P(A) = 1 \quad \text{إذا كان } A \text{ حدثاً مؤكداً}$$

أي أن نسبة احتمال أي حدث تنتمي للفترة المغلقة  $[0, 1]$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{حدثان مستقلان ( احتمال حدوث أي منهما لا يشترط حدوث$$

الآخر )

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

إذا كان  $A \cap B = \emptyset$  يكون :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{أي:}$$

### مثال 1

أقراص مرقمة من 10 إلى 21 سحب منها قرص واحد جد نسبة احتمال ان هذا القرص يحمل عدد زوجياً او عدد يقبل القسمة على (3) بدون باقٍ

الحل :

$$S = \{ 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 \}$$

$$n(s) = 21 - 10 + 1 = 12 \quad \text{ويمكن عدّها}$$

$$n(A) = 6 \quad \text{ليكن } A \text{ حدث يحمل عدداً زوجياً} \Rightarrow$$

$$P(A) = n(A) / n(s) = 6/12$$

ليكن B حدث للعدد يقبل القسمة على 3 بدون باقٍ

$$B = \{12, 15, 18, 21\}$$

$$P(B) = n(B) / n(s) = 4 / 12$$

$$A \cap B = \{ 12, 18 \} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{12}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 6/12 + 4/12 - 2/12 = 8/12 = 2/3$$

### مثال 2

شركة افرادها هم 60 رجلاً و 20 امرأة ، من الرجال 35 رجل متزوج ومن النسوة 12 متزوجة من هذه الشركة اختبر شخص واحد عشوائياً جد احتمال ان يكون :

1 هذا الشخص رجل

2 هذا الشخص امرأة غير متزوجة

الحل :

1 ليكن A الحدث ((الشخص رجل))

$$n(s) = 60 + 20 = 80$$

$$P(A) = 60 / 80 = 3/4$$

2 ليكن B الحدث (( الشخص امرأة غير متزوجة ))

$$P(B) = 8 / 80 = 1/10$$



### مثال 3

القينا حجري نرد متمايزين مرة واحدة جد احتمال ان يكون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 10 او مجموع العددين على الوجهين الظاهرين 9

الحل :

$$n(s) = 6 \times 6 = 36$$

ليكن  $A =$  الحدث : مجموع العددين على الوجهين الظاهرين = 10

$$A = \{(5,5), (4,6), (6,4)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = n(A) / n(s) = 3 / 36$$

ليكن  $B =$  الحدث : مجموع العددين على الوجهين الظاهرين = 9

$$B = \{(4,5), (5,4), (3,6), (6,3)\} \Rightarrow n(B) = 4$$

$$P(B) = 4 / 36, A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= 3 / 36 + 4 / 36 = 7 / 36$$

### مثال 4

رمينا حجري متمايزين من احجار النرد مرة واحدة ما احتمال ان يكون العدد علي وجه احد الحجرين هو ضعف العدد على الوجه الاخر أو العددين على الوجهين الظاهرين مجموعهما = 6

الحل :

لتكن  $A =$  الحدث: العدد على الوجه الظاهري لأحد الحجرين ضعف العدد على الوجه الآخر

$$A = \{(3,6), (6,3), (2,4), (4,2), (1,2), (2,1)\}$$

$$n(A) = 6$$

$$P(A) = n(A) / n(s) = 6 / 36$$

ليكن  $B =$  الحدث : مجموع العددين على الوجهين = 6

$$B = \{(3,3), (2,4), (4,2), (1,5), (5,1)\}$$

$$P(B) = n(B) / n(s) = 5 / 36$$

$$A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$$

$$P(A \cap B) = 2/36$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

### مثال 5

ليكن احتمال نجاح طالب في امتحان الرياضيات هو 90 % وليكن احتمال نجاح طالب آخر في الرياضيات هو 70 % جد نسبة احتمال نجاحهما معاً في امتحان الرياضيات .

الحل :

ليكن  $P(A)$  نسبة احتمال نجاح طالب الاول في الرياضيات

$$\therefore P(A) = 0.90$$

ليكن  $P(B)$  نسبة احتمال نجاح طالب اخر في الرياضيات

$$\therefore P(B) = 0.70$$

من الواضح ان  $A$  ,  $B$  حدثين مستقلين ( لان نجاح احدهما لا يتأثر بنجاح الاخر )

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ &= 0.90 \times 0.70 = 0.63 \end{aligned}$$

### مثال 6

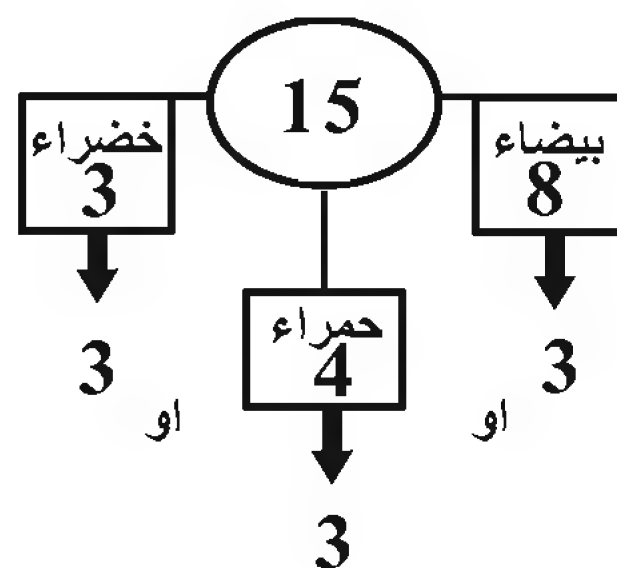
صندوق يحتوي 8 اقراص بيضاء ، 4 اقراص حمراء ، 3 اقراص خضراء سحبنا (3) اقراص مرة واحدة جد نسبة احتمال الاقراص المسحوبة من نفس اللون

الحل :

$$n = 8+4+3 = 15$$

$$r = 3$$

$$\begin{aligned} P &= (C_3^8 + C_3^4 + C_3^3) / C_3^{15} \\ &= \frac{61}{455} \end{aligned}$$



### مثال 7

يراد تكوين لجنة من 5 أشخاص من بين 8 طلاب و 6 طالبات

1. جد نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطلاب

2. جد نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطالبات

الحل :

$$n(s) = C_5^{14}$$

1. نفرض نسبة احتمال اللجنة جميعها طلاب  $P(A)$

$$P(A) = C_5^8 / C_5^{14} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 / 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 = \frac{4}{143}$$

2. نفرض نسبة احتمال اللجنة جميعها طالبات  $P(B)$

$$P(B) = C_5^6 / C_5^{14} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 / 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 = \frac{3}{281}$$



### تمارين (3-8)

1 صندوق يحتوي ثلاث كرات بيضاء مرقمة بالأرقام من 1 ، 2 ، 3 وكرتين سوداويتين مرقمتين

1 ، 2 إذا علمت أن الكرات متماثلة بالحجم سحبت كرة واحدة جد احتمال

أ. الكرة سوداء. ب. الكرة بيضاء. ج. الكرة بيضاء وتحمل رقم فردي

2 رميت حجرين متمايزين من أحجار النرد:

أ. ماهو احتمال العددين الظاهرين مجموعهما 6

ب. ماهو احتمال الحصول على مجموع 7 او مجموع 11

3 صندوقان يحتوي كل منهما على 6 كرات بيضاء و 4 حمراء، جد نسبة احتمال سحب 3 كرات

بيضاء من الصندوق الاول، وسحب كرتين بيضاويتين وكرة حمراء من الصندوق الثاني.

4 لدينا 5 بطاقات مرقمة من 1 الى 5 سحبت بطاقة واحدة جد نسبة احتمال البطاقة لا تحمل

رقم 3.

5 كيس يحتوي على 20 كرة متجانسة في جميع عناصرها مرقمة من 1 ... 20 سحبت كرة

واحدة. جد:

أ. احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً اصغر من 9.

ب. احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً اكبر من 5.

6 صندوق يحتوي على 21 قرص مرقم من 1 ... 21 سحب قرصان جد نسبة احتمال:

أ. القرصان زوجيان.

ب. الاول زوجي والآخر فردي.

7 لدينا 50 بطاقة مرقمة من 1 ... 50 جد احتمال العدد على البطاقة المسحوبة:

أ. يقبل القسمة على 5.

ب. يقبل القسمة على 7.

ج. يقبل القسمة على 5 أو 7

8 يراد اختيار لجنة طلابية تتكون من ثلاث اشخاص بين 12 طالب و 4 طالبات. ما احتمال كل

مما يأتي:

أ. ان تكون اللجنة جميعها طلاب.

ب. ان يكون في اللجنة طالب واحد فقط.

9 رميت حجري نرد متمايزان مرة واحدة ما احتمال ان يكون مجموع العددين الظاهرين 9 أو

يساوي 11



## [ 6 - 8 ] مبرهنة ذات الحدين Binomial Theorem

**مبرهنة ذات الحدين :** هي قانون لايجاد ما يساوي أي مقدار ذي حدين مثل  $(a+b)$  إذا رفع إلى أي أس بدون إجراء عملية الضرب إذا كان الأس عدداً صحيحاً موجباً.  
إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين و  $n$  عدداً صحيحاً موجباً

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$(a-b)^n = C_0^n a^n - C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 - \dots + C_n^n (-b)^n \quad (2)$$

نلاحظ ان حدود هذا المفكوك تكون سالبة او موجبة على التعاقب ويكون الحد الاخير موجباً إذا كانت  $n$  زوجية وسالبة إذا كانت  $n$  فردية .

**ملاحظات :**

- (1) عدد حدود المفكوك  $n+1$
- (2) أس الحد الاول واس الحد الاخير  $n$
- (3) مجموع أسس الرموز المكونة للحد  $n$
- (4) أس الحد الاول يبدأ بالتناقص من  $n$  إلى 0  
إس الحد الثاني يتزايد من 0 إلى  $n$
- (5) إذا كان  $n$  عدد زوجي فان عدد حدود المفكوك  
يكون فردي ورتبة الحد الاوسط  $\frac{n}{2} + 1$
- (6) إذا كان  $n$  عدد فردي فان عدد حدود المفكوك  
يكون زوجي لذا فان رتبة الحدين الاوسطين  
 $\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1$  أو  $\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}$

**مثال 1**

اوجد مفكوك  $(a+b)^5$

$$(a+b)^5 = C_0^5 a^5 + C_1^5 a^4 b + C_2^5 a^3 b^2 + C_3^5 a^2 b^3 + C_4^5 a b^4 + C_5^5 b^5$$

$$= a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

**مثال 2**

اوجد قيمة  $(101)^3$

$$(101)^3 = (1+100)^3 = 1 + C_1^3 100 + C_2^3 (100)^2 + C_3^3 (100)^3$$

$$= 1 + 300 + 30\,000 + 1\,000\,000$$

$$= 1\,030\,301$$

إذا كان مفكوك  $(a+b)^n$  فان :

$$P_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

**قانون الحد العام**



### مثال 3

جد الحد الخامس في مفكوك  $(a+b)^{10}$

الحل :

$$P_r = c_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$P_5 = c_{5-1}^{10} a^{10-5+1} b^{5-1}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} a^6 b^4$$

$$= 210 a^6 b^4$$

### مثال 4

برهن إن مفكوك  $(x^2 + 2/x^3)^{10}$  يحتوي على الحد الذي فيه  $x^{15}$  ثم جد معاملته

الحل :

$$P_r = c_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$P_r = c_{r-1}^{10} (x^2)^{10-r+1} \cdot (2/x^3)^{r-1}$$

$$x^{15} = (x^2)^{11-r} (x^{-3})^{r-1}$$

$$x^{15} = (x^{22-2r}) (x^{-3r+3})$$

$$x^{15} = x^{25-5r} \Rightarrow 15 = 25-5r \Rightarrow 5r = 10 \Rightarrow r=2$$

$$P_2 = c_{2-1}^{10} (x^2)^{10-2+1} \cdot (2/x^3)^{2-1}$$

$$P_2 = 10(x^{18}) (2/x^3) = 20 x^{15}$$

$$P_2 \text{ معامل } 20$$

### مثال 5

اثبت انه لا يوجد حد خالٍ من  $(x)$  في مفكوك  $(5x - 4/x^2)^{19}$

الحل :

$$P_r = c_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$P_r = c_{r-1}^{19} (5x)^{19-r+1} \cdot (-4/x^2)^{r-1}$$

$$x^0 = (x)^{20-r} (x)^{-2r+2}$$

$$x^0 = x^{22-3r}$$

$$0 = 22-3r \Rightarrow r = 22/3 \Rightarrow r \notin \mathbb{Z}^+$$

∴ لا يوجد حد خالٍ من  $x$

### مثال 6

أوجد الحدين الاوسطين في مفكوك  $(3x/2 - 2/3x)^7$

**الحل :** رتبنا الحدين الاوسطين هما :

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$\frac{n+3}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$$

الحدان الاوسطان هما الرابع والخامس

$$P_r = c^n_{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$P_4 = c^7_3 (3x/2)^4 (-2/3x)^3$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \left( \frac{81x^4}{16} \right) \left( \frac{-8}{27x^3} \right) = - \frac{105}{2} x$$

$$P_5 = c^7_4 (3x/2)^3 (-2/3x)^4$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \left( \frac{27x^3}{8} \right) \left( \frac{16}{81x^4} \right) = \frac{70}{3x}$$

### مثال 7

إذا كانت النسبة بين الحدين الخامس، والعاشر في مفكوك  $(1+x)^{12}$  تساوي  $8/27$  جد قيمة  $x$

**الحل :**

$$P_r = c^n_{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$P_5 = c^{12}_4 x^4$$

$$P_{10} = c^{12}_9 x^9 = c^{12}_3 x^9$$

$$c^{12}_4 x^4 / c^{12}_3 x^9 = 8 / 27$$

$$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{12 \times 11 \times 10 x^5} = \frac{8}{27}$$

$$9/4x^5 = 8/27 \Rightarrow x^5 = 9 \times 27 / 4 \times 8 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



### مثال 8

اختصر المقدار  $(2+x)^4 + (2-x)^4$  الى أبسط صورة ثم جد القيمة للمقدار

$$(2 + \sqrt{3})^4 + (2 - \sqrt{3})^4$$

الحل :

ضعف الحدود الفردية  $(2+x)^4 + (2-x)^4 =$

في مفكوك  $(2+x)^4$

$$= 2 [P_1 + P_3 + P_5]$$

$$= 2 [2^4 + c_2^4 (2)^2 (x)^2 + x^4]$$

$$= 2 [16 + 24x^2 + x^4]$$

$$x = \sqrt{3} \text{ نضع}$$

$$= 2 [16 + 24 \times 3 + 9] = 2 \times 97 = 194$$

### مثال 9

اختصر المقدار  $(x + \frac{1}{x})^5 - (x - \frac{1}{x})^5$  ثم اوجد قيمة

$$(2 + \frac{1}{2})^5 - (2 - \frac{1}{2})^5$$

الحل :

ضعف الحدود الزوجية  $(x + \frac{1}{x})^5 - (x - \frac{1}{x})^5 =$

في مفكوك  $(x + \frac{1}{x})^5$

$$= 2 [P_2 + P_4 + P_6]$$

$$= 2 [c_1^5 x^4 (1/x) + c_3^5 x^2 (1/x)^3 + c_5^5 (1/x)^5]$$

$$= 2 [5x^3 + 10/x + 1/x^5]$$

$$x = 2 \text{ نضع}$$

$$= (2 + \frac{1}{2})^5 - (2 - \frac{1}{2})^5 = 2 [5 \times 2^3 + (10/2) + (1/32)]$$

$$= 2 [40 + 5 + (1/32)] = 80 + 10 + (1/16) = 90 \frac{1}{16}$$

تمارين (4-8)

a.  $(a-b)^3$  , b.  $(1+x)^4$

1 جد مفكوك كل مما يأتي :

$(2x + \frac{1}{x})^{10}$

2 أوجد الحد الثامن في مفكوك

$(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$

3 أوجد الحد الأوسط في مفكوك

$(3x^2 + (2/3x))^5$

4 أوجد الحدين الأوسطين

5 إذا كانت نسبة الحد الثامن إلى الحد الثالث في مفكوك  $(3x+2)^{10}$  تساوي  $1/12$  جد قيمة  $(x)$

6 أوجد الحد الخالي من  $x$  في مفكوك

$(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x})^9$

7 في مفكوك  $(x^2 + (a/x))^5$  إذا كان معامل  $x$  يساوي 80. فإذا كان  $x=1$  جد قيمة  $a$ .

8 فيما يأتي اربع اجابات واحدة منها صحيحة حدد الاجابة الصحيحة

a.

الحد الثالث في مفكوك  $(x+2)^6$

1.  $60x^3$

2.  $120x^4$

3.  $40x^4$

4.  $60x^4$

b.

إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك  $(5x+4y)^7$  متساويان فأن

1.  $x=(2/5)y$

2.  $x = (4/5)y$

3.  $x = 5y/4$

4.  $x = y$



المصفوفات Matrices

- [ 9 -1 ] تعريف المصفوفة .
- [ 9 -2 ] تعريف .
- [ 9 -3 ] تعريف [ تساوي مصفوفتين ] .
- [ 9 -4 ] بعض المصفوفات الشهيرة .
- [ 9 -5 ] جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي .
- [ 9 -5-1 ] تعريف [ ضرب مصفوفة في عدد حقيقي ] .
- [ 9 -6 ] نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع .
- [ 9 -7 ] النظير الضربي للمصفوفة .
- [ 9 -8 ] تعريف .
- [ 9 -9 ] تعريف .
- [ 9 -10 ] حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين باستخدام المصفوفات .
- [ 9 -11 ] محددات الرتبة الثانية باستخدامها في حل معادلات المجهولين .
- [ 9 -11-1 ] استخدام المحددات في حل ثلاث معادلات من الدرجة الأولى في ثلاث متغيرات .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
المصفوفة $A$	$A = [a_{ij}]$
محدد المصفوفة $A$	$\Delta A =  a_{ij} $
النظير الجمعي للمصفوفة $A$	$-A$
النظير الضربي للمصفوفة $A$	$A^{-1}$
طريقة كرامر في حل معادلتين	$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

## الفصل التاسع

Matrices

المصفوفات

Determinats

المحددات

الفصل العاشر

أولاً : المصفوفات Matrices

مقدمة :

**التعريف العام للمصفوفة :** المصفوفات جمع كلمة مصفوفة وهي مفهوم رياضي يؤدي دوراً هاماً في معظم فروع المعرفة ، وقد لوحظت المصفوفات لأول مرة واستعملت من قبل العالم كيلي (1821 - 1895) وتستعمل المصفوفات في الوقت الحاضر من قبل المختصين في علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس . هذا فضلاً عن الدور الكبير الذي تلعبه في الرياضيات وخاصة فيما يسمى بالجبر الخطي ولها تطبيقات أخرى لاغنى عنها في الفيزياء والكيمياء وسائر العلوم التطبيقية . لنفرض أن أربعة طلاب **A, B, C, D** كانت درجاتهم في إختبار مادة الرياضيات هي على الترتيب **94, 82, 73, 60** وفي الفيزياء **75, 84, 68, 87** على الترتيب .

فيمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول مستطيل يتكون من صفين وأربعة أعمدة كالاتي :

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	
94	82	73	60	الرياضيات
75	84	68	87	الفيزياء

إن الصف الاول في هذا المستطيل يعبر عن درجات الطلاب في الرياضيات والصف الثاني يعبر عن درجات الطلاب في الفيزياء كما أن العمود الاول يعبر عن درجات الطالب في المادتين معاً والعمود الثاني يعبر عن درجات الطالب في المادتين معاً وهكذا الطالبين . ويمكن كتابة الجدول السابق على الصورة :

$$\begin{bmatrix} 94 & 82 & 73 & 60 \\ 75 & 84 & 68 & 87 \end{bmatrix}$$

شكل ( 9 - 1 )

$$\text{او} \begin{pmatrix} 94 & 82 & 73 & 60 \\ 75 & 84 & 68 & 87 \end{pmatrix}$$

شكل ( 9 - 2 )

وسنختار في هذا الكتاب الشكل (1)



٢٠. مثل هذا الجدول (الترتيب) اي الشكل رقم (1- 9 ) يسمى مصفوفة (Matrix).

نأخذ المثال التالي : جدول الضرب:

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24

إن هذا الجدول له أربعة صفوف وستة اعمدة وكل عنصر (عدد) في هذا الجدول يتحدد (يتعين ) موقعه بالصف والعمود . فمثلاً (15) يقع في الصف الثالث والعمود الخامس ، بينما (16) يقع في الصف الرابع والعمود الرابع .

#### تعريف (1 - 9) :

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من  $m \times n$  عنصراً (Element) مرتبة في جدول مستطيل مكون من  $m$  صفاً ،  $n$  عموداً ،  $m, n \in \mathbb{N}^+$

#### تعريف (2 - 9) :

نقول عن المصفوفة انها من النوع  $m \times n$  وتقرأ  $m$  في  $n$  اذا كانت تحتوي صفوفها (Rows) عددها  $m$  وأعمدة Columns عددها  $n$  كما نقول أحياناً واختصاراً إنها مصفوفة  $m \times n$  ،  $m, n \in \mathbb{N}^+$

سنرمز للمصفوفة بحرف مثل :  $A, B, C \dots\dots$

خشية الالتباس بين المصفوفة وعناصرها كما يجب الانتباه أن عناصر أي مصفوفة في هذا الكتاب تنتمي الى حقل الاعداد الحقيقية  $R$  .

إن كلاً من التنظيمات العددية الآتية هي عبارة عن مصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

لاحظ المصفوفة A هي عبارة عن ستة عناصر مرتبة في صفين وثلاثة أعمدة، ان عناصر الصف الاول هي 1، 2، 3، وعناصر الصف الثاني هي 7، 0، -1 وعناصر العمود الثالث هي 3، 7.

وحسب تعريف (1- 9) نقول أن A مصفوفة من النوع  $2 \times 3$  حيث  $m = 2$ ،  $n = 3$  وإن B مصفوفة من النوع  $3 \times 2$  حيث  $m = 3$ ،  $n = 2$  وإن C مصفوفة من النوع  $2 \times 2$  حيث  $m = 2$ ،  $n = 2$  أما E مصفوفة من النوع  $3 \times 4$

وبصفة عامة إذا كانت A مصفوفة من النوع  $m \times n$  فإننا نكتب A على الصورة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$



إن  $a_{ij}$  يمثل عنصراً اختيارياً (عاماً) في  $A$  حيث يرمز  $i$  إلى ترتيب الصف الذي يقع فيه العنصر بينما يرمز  $j$  إلى ترتيب العمود الذي يقع فيه هذا العنصر وبذلك بتعيين العنصر  $a_{ij}$  تماماً بمعرفة قيمتي  $j$  و  $i$  معاً .

## مثال 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{إذا كانت}$$

عين قيم جميع العناصر  $a_{ij}$

**الحل:**

بما أن المصفوفة من النوع  $2 \times 3$  فإن :

$i = 1, 2$  بينما  $j = 1, 2, 3$  وبالتالي فإن  $a_{ij}$  له ست قيم هي :

$a_{11}$  (يمثل العنصر في الصف الأول والعمود الأول)  $= 1$   
 $a_{12}$  (يمثل العنصر في الصف الأول والعمود الثاني)  $= -1$

وبالمثل  $a_{13}=2$  ,  $a_{21}= -4$  ,  $a_{22}=1$  ,  $a_{23}=5$

تساوي مصفوفتين :

تعريف (3 - 9) :

- نقول ان المصفوفتين  $A, B$  متساويتان ونكتب  $A=B$  اذا تحقق الشرطان الاتيان معاً :
1.  $A, B$  من نوع واحد اي ان عدد صفوف  $A$  يساوي عدد صفوف  $B$  وعدد اعمدة  $A$  يساوي عدد اعمدة  $B$ .
  2.  $a_{ij} = b_{ij}$  لجميع قيم  $i$  و  $j$  الممكنة حيث  $i$  و  $j$  عددان طبيعيان موجبان

مثال 3

عين جميع عناصر المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$  اذا علمت ان

$$A = B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل :

من تعريف تساوي مصفوفتين نجد ان :

$$a_{11}=2, \quad a_{12}=-1, \quad a_{13}=6, \quad a_{21}=-3, \quad a_{22}=0, \quad a_{23}=-4$$

[ 4 - 9 ] بعض المصفوفات الشهيرة :

المصفوفة المستطيلة **Rectangular Matrix** : هي مصفوفة من نوع  $m \times n$  حيث  $m \neq n$

وعندما  $m=1$  تسمى (مصفوفة الصف **Row Matrix**) من النوع  $1 \times n$

وعندما  $n=1$  تسمى (مصفوفة العمود **Column Matrix**) من النوع  $m \times 1$

المصفوفة المربعة (**Square Matrix**) : وهي مصفوفة من النوع  $n \times n$  اي ان عدد

صفوفها = عدد اعمدتها.

المصفوفة القطرية (**Diagonal Matrix**) : وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار

ما عدا العناصر الواقعة على القطر الاساس فيكون احدها على الاقل مغايراً للصفر .

مصفوفة الوحدة (**Unit Matrix**) : وهي مصفوفة قطرية يكون فيها كل من العناصر الواقعة

على القطر الاساس مساوياً للواحد .



المصفوفة الصفرية (Zero Matrix): وهي مصفوفة  $m \times n$  وجميع عناصرها اصفار وسنرمز لها بالرمز (0)

#### مثال 4

أ. المصفوفة  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$  مستطيلة فيها  $n=3$  ,  $m=2$

ب. المصفوفة  $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  مصفوفة صف فيها  $n=3$  ,  $m=1$

ج. المصفوفة  $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  مصفوفة عمود فيها  $n=1$  ,  $m=3$

د. المصفوفة  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$  مصفوفة مربعة  $3 \times 3$  قطرها الاساس 6 , 2 , 3

وقطرها الثانوي الآخر 1 , 2 , 5

هـ. المصفوفة  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  مصفوفة قطرية  $3 \times 3$  عناصر قطرها 2 , -1 , 1

و. كل من المصفوفات:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  هي مصفوفة وحدة

ز. كل من المصفوفات:  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هي مصفوفة صفرية لاحظ أن كل واحدة تختلف عن الأخرى فمثلاً :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

لأن الأولى من النوع  $2 \times 1$  بينما الثانية من النوع  $1 \times 2$

**[ 9 - 5 ] جمع المصفوفات وضربها في عدد حقيقي:**

**تعريف : ( 9 - 4 )**

إذا كانت  $A = [a_{ij}]$  ،  $B = [b_{ij}]$  مصفوفتين كل منهما  $m \times n$  فان مجموعهما هو المصفوفة

$$C = [c_{ij}] \quad \text{حيث} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

ان هذا التعريف يعني أننا نستطيع جمع أي مصفوفتين  $A, B$  إذا وفقط إذا كانتا من النوع  $m \times n$  نفسه وحينئذ يمكننا ان نكتب مجموعها بالصورة :

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$  أي اننا نحصل على مصفوفة جديدة من النوع نفسه كل عنصر فيها يمثل مجموع العنصرين المتناظرين بالوضع في  $A, B$

**مثال 5**

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

فأوجد :  $A+A$  ,  $B+A$  ,  $A+B$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B = B+A$$



$$A+A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 10 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان  $2A$  تمثل ضرب كل من عناصر في  $A$  بالعدد (2) .

تعريف : (5-9)

إذا كانت  $A = [a_{ij}]$  مصفوفة  $m \times n$  وكانت  $K \in R$  فان حاصل ضرب المصفوفة  $A$  بالعدد الحقيقي  $k$  هو المصفوفة  $C = [c_{ij}]$  حيث  $c_{ij} = Ka_{ij}$  لجميع قيم  $i, j$  الممكنة اي ان :  $KA = [ka_{ij}]$

مثال 6

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  فجد المصفوفة  $k.A$  عندما تكون :

$K = -1$  (ج)  $k = \frac{1}{2}$  (ب)  $k=2$  (أ)

الحل :

(أ)  $kA = 2A = 2 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(ب)  $k.A = \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$k A = (-1) A = (-1) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[ 9 -6 ] نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع :

تعريف : ( 9 -6 )

إذا كانت  $A, B$  مصفوفتين من النوع  $m \times n$  فإن :

$$A - B = A + (-1)B$$

مثال 7

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} : \text{إذا كانت}$$

فجد كلاً من  $A - B$  ,  $B - A$  وتحقق أنهما غير متساويتين :

الحل :

$$A - B = A + (-1)B$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - A = B + (-1)A$$



$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A - B \neq B - A$$

### خواص جمع المصفوفات :

إذا كانت  $H$  مجموعة المصفوفات من النوع  $m \times n$  فان النظام  $(H, +)$  حيث  $(+)$  عملية جمع المصفوفات يتمتع بالخواص الآتية :

$$\forall A, B \in H$$

$$A + B \in H \text{ فان}$$

1. العملية  $(+)$  ثنائية على  $H$  : لأنه

$$\forall A, B \in H$$

$$A + B = B + A \text{ فان}$$

2. العملية  $(+)$  إبدالية :

$$\forall A, B, C \in H$$

$$(A+B) + C = A + (B + C) \text{ فان}$$

3. العملية  $(+)$  تجميعية :

4. يوجد في  $H$  عنصر محايد هو المصفوفة الصفرية  $(0)$  لأنه

$$\forall A \in H$$

$$0 + A = A + 0 = A \text{ فان}$$

$$B = (-1) A \in H$$

$$A + B = 0 \text{ بحيث}$$

5. لكل مصفوفة  $A$  تنتمي الى  $H$  يوجد مصفوفة

**ملاحظة:** إن تحقيق الخواص السابقة يمكن إيجازها في قولنا  $\left[ \text{أن النظام } (H, +) \text{ زمرة إبدالية} \right]$

### خواص ضرب عدد حقيقي بمصفوفة :

إذا كانت  $A, B$  مصفوفتين من النوع  $m \times n$  وكان  $K, L \in \mathbb{R}$  فإن :

1.  $K(A + B) = K \cdot A + K \cdot B$
2.  $(K+L) \cdot A = K \cdot A + L \cdot A$
3.  $K \cdot (L \cdot A) = (K \cdot L) \cdot A$
4. IF  $K \cdot A = 0 \Leftrightarrow K = 0$  OR  $A = 0$
5. IF  $K \cdot A = K \cdot B$  حيث  $K \neq 0 \Rightarrow A = B$
6.  $1 \cdot A = A$

### مثال 8

إذا كانت  $A, B, C \in H$

حيث  $H$  مجموعة المصفوفات من النوع  $m \times n$  فجد  $C$  التي هي حل المعادلة

$$C + B = A$$

الحل :

بإضافة المصفوفة  $-B$  الى الطرفين :

$$C + B + (-B) = A + (-B)$$

خاصية التجميع في المصفوفات  $C + (B - B) = A - B$

خاصية العنصرين المتناظرين  $\Rightarrow C + 0 = A - B$

خاصية العنصر المحايد  $\Rightarrow C = A - B$

### ملاحظة :

إن  $-B$  هي النظير الجمعي للمصفوفة  $B$  وهو نظير وحيد والعنصر المحايد  $0$  وحيد وبالتالي يكون  $C = A - B$  حلاً وحيداً للمعادلة .



### مثال 9

إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

فجد حل المعادلة  $C + B = A$  وتحقق من صحة الناتج .

الحل :

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

التحقق : نحقق قيمة C في المعادلة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = A$$

### مثال 10

حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$-3 \left( C - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = (-4) C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-3) C + (-3)(-1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = (-4) C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-3) C + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = (-4) C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$4C + (-3)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$



تمارين ( 9 -1 )



1. جد قيم  $x, y, z, h$  اذا كان :

$$\begin{bmatrix} x-2 & 2y+1 \\ x+3 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ z & 3h-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x & 10 \\ 2x+z & 2y-h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 2y \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

2. اجر العمليات الاتية ان امكن ، مع ذكر السبب في حالة تعذر اجراء العملية :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$



3 إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  فجد المصفوفة  $k.A$  عندما تكون :

$k=2$  ,  $k=-1$  ,  $k=0$  ,  $k=\frac{2}{5}$  ,  $k=1$

4 إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$  ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}$  ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix}$  فعبّر عن كل مما يأتي كمصفوفة

$2A + B + C$

$A + (B+C)$

5 باستعمال المصفوفات  $A$  ,  $B$  ,  $C$  الواردة في التمرين (4) حل كلاً من المعادلات المصفوفية الآتية :

$A + X = B + C$

$2 ( B - C ) = 2 ( X - C ) - B$

$\frac{1}{2} (A + X) = 3X + 2B$

## ضرب المصفوفات Multiplication Of Matrices :

سنوضح ضرب المصفوفات من خلال الامثلة الآتية:

إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فان حاصل ضرب  $A \times B$  يعرف كما يلي :

$$1. \quad A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 4 + 3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 8 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

فان  $A \times B$  يعرف كما يلي

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 4 & 1 \times (-1) + 3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فان  $A \times B$  يعرف كما يلي:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + (-1) \times 0 + 3 \times 1 \\ 2 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



فان  $A \times B$  يعرف كما يلي:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 5 + 1 \times (-1) & 2 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + (-1) \times 5 + 3 \times (-1) & 1 \times 3 + (-1) \times 1 + 3 \times 0 \\ -1 \times 1 + 0 \times 5 + 0 \times (-1) & -1 \times 3 + 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

**ملاحظة :**

شروط ضرب  $A \times B$  هي:

أ. أعمدة  $A$  = صفوف  $B$

ب. إذا كانت  $A$  من النوع  $m \times L$  ، وكانت  $B$  من النوع  $L \times n$  فان حاصل الضرب  $A \times B$

تكون مصفوفة من النوع  $m \times n$

ج. إذا كانت  $A, B$  مصفوفتين مربعيتين  $m \times m$  فان كلا من  $AB$  ,  $BA$  مصفوفة مربعة  $m \times m$

وبصفة خاصة إذا كانت  $A=B$  فسنكتب  $AA$  بالصورة  $A^2$  اي ان  $A^2 = AA$

**مثال 1**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فجد ان امكن :

$$B^2 \quad A^2 \quad B \times A \quad A \times B$$

**الحل :** بما ان عدد اعمدة  $A$  = عدد صفوف  $B$  فان  $A \times B$  يمكن ايجادها :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 14 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إيجاد  $A \times B$  لأن اعمدة  $B \neq$  صفوف  $A$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إيجادها لأن اعمدة  $B \neq$  صفوف  $B$  حيث  $B^2 = B \times B$

### مثال 2

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

فأثبت أن عملية ضرب المصفوفة غير ابدالية .

الحل :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 35 \end{bmatrix}$$

من الواضح أن  $A \times B \neq B \times A$

### مثال 3

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأثبت أن  $A \times I = I \times A$  وماذا تستنتج من ذلك ؟

الحل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

كذلك  $I \times A = A$



$$\therefore \text{نستنتج ان } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة محايدة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفة المربعة من النوع  $2 \times 2$

مثال 4

إذا علمت ان

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

فجد كلاً من  $x$  ,  $y$  ,  $z$

الحل :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times 3 \\ 0 \times 1 + (-2)(-2) + 3 \times 3 \\ 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = -2 , \quad y = 13 , \quad z = 0$$

مثال 5

إذا علمت ان  $A$  مصفوفة من النوع  $2 \times 3$  ،  $B$  مصفوفة من النوع  $3 \times 2$  فجد نوع كل من

المصفوفات الآتية :

$$(B \times A) \times B \quad (A \times B) \times A \quad B \times A \quad A \times B$$

الحل :

$$\begin{array}{llll} A \text{ مصفوفة } 2 \times 3 , & B \text{ مصفوفة } 3 \times 2 & \Rightarrow & A \times B \text{ مصفوفة } 2 \times 2 \\ B \text{ مصفوفة } 3 \times 2 , & A \text{ مصفوفة } 2 \times 3 & \Rightarrow & B \times A \text{ مصفوفة } 3 \times 3 \\ (A \times B) \text{ مصفوفة } 2 \times 2 , & A \text{ مصفوفة } 2 \times 3 & \Rightarrow & (B \times A) \times A \text{ مصفوفة } 2 \times 3 \\ (B \times A) \text{ مصفوفة } 3 \times 3 , & B \text{ مصفوفة } 3 \times 2 & \Rightarrow & (B \times A) \times B \text{ مصفوفة } 3 \times 2 \end{array}$$

### مثال : 6

إذا كانت

$$A^2 - 3A + 2I = 0 \quad \text{فثبت ان} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{الطرف الاول}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 = \text{الطرف الثاني}$$

تمارين (2-10)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

إذا كانت :

فجد

$$C \times A$$

$$B \times A$$

$$B \times C$$

$$A \times C$$

$$A \times B$$

$$A \times (B \times C)$$

$$(A \times B) \times C$$

$$C \times B$$

إذا كانت A, B, C كما في التمرين السابق وكانت I مصفوفة الوحدة فثبت ان :

$$B^2 = -I$$

$$A^2 = C^2 = I$$

$$A \times B = -(B \times A)$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

إذا كانت A مصفوفة 3 × 2 و B مصفوفة 3 × 3 و C مصفوفة 4 × 3

و D مصفوفة 3 × 2 . فبين نوع كل من المصفوفات الآتية :

$$B \times D$$

$$C \times B$$

$$A \times D$$

$$D \times A$$

$$A \times B$$

$$(A \times D) \times A$$

$$(C \times B) \times D$$

$$D \times (A \times B)$$



4 اجر عملية الضرب فيما يأتي ، أن امكن واذكر السبب في حالة تعذر اجراء عملية الضرب:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{اذا كانت}$$

بين صحة أو خطأ كل من العبارات الاتية مع ذكر السبب :

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A$$

$$A \times (B + A) = A \times B + A^2$$

$$A \times (B + C) = B \times A + C \times A$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

6 إذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فأثبت ان :

$$A^2 - 2A - 3I = 0$$

$$B^2 - B + I = 0$$

$$A \times B \neq B \times A$$

7 إذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فأثبت ان :  $A \times B = B \times A = I$  لاحظ ان  $A \times B$  كل منها النظير الضربي للآخر.

### [ 9 - 7 ] النظير الضربي للمصفوفة : Inveres of a Matrix

سنتناول هنا دراسة النظير الضربي للمصفوفة المربعة من النوع  $2 \times 2$  فقط.

#### تعريف: ( 9 - 7 )

النظير الضربي للمصفوفة  $A$  من النوع  $2 \times 2$  إن وجدت مصفوفة  $B$  من النوع نفسه بحيث

$$A \times B = B \times A = I$$

حيث  $I$  المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية الضرب (أي مصفوفة الوحدة من النوع  $2 \times 2$ )

سنرمز للنظير الضربي للمصفوفة  $A$  بالرمز  $A^{-1}$  (أي ان  $B = A^{-1}$ )



## تعريف (8-9) : محدد المصفوفة The Determinat Of Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ إذا كانت}$$

فان المقدار  $a.d - b.c$  يسمى محدد المصفوفة  $A$  ويرمز بالرمز  $\Delta$  او بالرمز  $\Delta$  وتقرأ دلتا أي أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

تجدر الإشارة الى انه المقدار  $a.d - b.c$  هو عبارة عن حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الاساس في المصفوفة  $A$  مطروحاً منه حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الآخر . كما أن الخطين | لا يرمزان للقيم المطلقة .

### مثال 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{إذا علمت ان}$$

فاوجد

$$B \times A$$

$$A \times B$$

$$\text{محدد } B$$

$$\text{محدد } A$$

ماذا تستنتج من الفرعين ج ، د .

الحل :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 0 \times (-6) = 6 \quad \text{محدد } A :$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - 0 \times 1 = \frac{1}{6} \quad \text{محدد } B :$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \times B$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B \times A$$

نستنتج من الفرعين **جـ** ، د أن كلاً من  $A$  ،  $B$  نظير ضربى للأخرى أي أن :

$$A^{-1} = B , \quad B^{-1} = A \quad (7-9)$$

### تعريف (9-9) :

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  فان النظير الضربى للمصفوفة  $A$  يكون موجوداً

(معروفاً) عندما تكون محدداً تساوي صفراً أي  $(\Delta A \neq 0)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$$

### ملاحظة :

إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  وللحصول على  $A^{-1}$  (ان كان موجوداً) فيجب

اتباع الخطوات الآتية لإيجاده ويكون امراً سهلاً :

قبل كل شيء نجد قيمة  $\Delta$  (محدد  $A$ ) فإذا كانت  $\Delta = 0$  فان  $A$  ليس لها نظير ضربى وإذا

كانت  $\Delta \neq 0$  فان للمصفوفة  $A$  نظيراً ضربياً يتعين كالاتي :

أ. تبادل بين وضعي العنصرين الواقعين على القطر الأساس للمصفوفة  $A$  .

ب. نغير كل من اشارتي العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة  $A$  .

ج. نضرب المصفوفة الناتجة بعد اجراء عمليتي أ ، ب بالعدد  $\frac{1}{\Delta}$  فنحصل على  $A^{-1}$



## مثال 2

إذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \text{ حيث } xy \neq 0, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

فاثبت ان لكل من A, B ، نظير ضربى ثم أوجده ؟

الحل :

بالنسبة للمصفوفة A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

∴ للمصفوفة نظير ضربى هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بالنسبة للمصفوفة B :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = xy \neq 0$$

حسب نظرية الضرب

للمصفوفة نظير ضربى هو :

$$B^{-1} = \frac{1}{xy} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$$

ان هذا يعني انه اذا كانت B مصفوفة قطرية عناصرها مغايرة للصفر فان نظيرها مصفوفة قطرية أيضاً عناصر قطرها هي مقلوب عناصر القطر في B .

بالنسبة للمصفوفة  $A \times B$  :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 4y \end{bmatrix}$$

ولما كانت  $A \times B$  مصفوفة قطرية قطرها مغايراً للصفر فإن :

$$(A \times B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4y} \end{bmatrix}$$

تحقق بنفسك ان :

$$(A \times B)^{-1} (A \times B) = (A \times B) (A \times B)^{-1} = I$$

### مثال 3

أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي ثم أوجده :

$$\begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل: أ. لهذه المصفوفة نظير ضربي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \therefore \text{لـ هذه المصفوفة نظير ضربي هو :}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -5 \times 3 - 5 \times (-3) = 0$$

$\therefore$  ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي .



$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2 \neq 0$$

∴ لهذه المصفوفة نظير ضربي هو :

$$c^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 12 \times 5 - 20 \times 3 = 0$$

∴ ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي .

مثال 4

إحسب قيم  $x$  التي تجعل المصفوفة الآتية ليس لها نظير ضربي

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{bmatrix}$$

الحل :

المصفوفة  $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{bmatrix}$  ليس لها نظير ضربي عندما تكون محددها صفراً أي :

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{vmatrix} = x^2 - 3 \times 12 = 0$$

$$x^2 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x = 6 , x = -6$$

## [9 - 10] حل معادلات الدرجة الاولى في مجهولين باستخدام المصفوفات :

إذا أعطينا نظام المعادلتين :

$$ax + by = L$$

$$cx + dy = k$$

يمكن كتابتها بالصيغة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix} \quad \text{فإذا فرضنا أن}$$

$$A \times B = C \quad (1)$$

تسمى  $A$  مصفوفة المعاملات،  $B$  مصفوفة المجاهيل،  $C$  مصفوفة الثوابت وإذا كانت المحدد  $A \neq 0$  أي  $\Delta = ad - bc \neq 0$  فمن الممكن إيجاد حل (1) كما يلي :

$$A^{-1} (A \times B) = A^{-1} \times C$$

$$(A^{-1} \times A) \times B = A^{-1} \times C$$

$$I \times B = A^{-1} \times C$$

$$B = A^{-1} \times C$$

بضرب طرفي (1) في  $A^{-1}$

خاصية التجميع

من تعريف النظير  $A$

لان  $I$  عنصر محايد

من الواضح ان بمقدورنا الان إيجاد المجهولين  $x, y$  (الذين يشكلان حل نظام المعادلتين الاصليتين) بدلالة الثوابت العددية  $a, b, c, d, L, k$ .



### مثال 5

حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات ثم حقق النتائج:

$$2x + 5y = 1 \dots\dots (1)$$

$$3x + 7y = 2 \dots\dots (2)$$

الحل :

نكتب المعادلة المصفوفية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : \text{حيث } AX = C$$

$$A \text{ محدد } = \Delta = 2 \times 7 - 5 \times 3 = -1 \neq 0$$

$\therefore A$  لها نظير ويكون الحل  $B = A^{-1} \times C$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x = 3, \quad y = -1$$

**التحقق :** بالتعويض المباشر في (2) ، (1) بقيمتي  $x, y$  نجد ان :

$$2 \times 3 + 5(-1) = 1$$

$$3 \times 3 + 7(-1) = 2$$

تمارين (3-9)

1. جد النظير الضربي لكل من المصفوفات الآتية كلما أمكن ذلك :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. احسب قيم  $x$  التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربي :

$$\begin{bmatrix} x^{-2} & 2 \\ 1 & x^{-2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 4 \\ 2 & x^{-2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & x \\ 4 & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

3. إذا كانت  $X = \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  فاثبت أن  $X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. إذا كانت  $Y = \begin{bmatrix} a & -ab \\ 0 & b \end{bmatrix}$  فاثبت أن  $Y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  حيث  $ab \neq 0$

5. إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  فاثبت أن  $A^{-1} = A$



6. إذا كانت

فاجب عما يلي :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}$  ,  $B^{-1}$

1. احسب كلا من

2. جد ناتج

$$A^{-1} \times B^{-1}, \quad B^{-1} \times A^{-1}$$

3. جد ناتجهما

$$A \times B, \quad (A \times B)^{-1}$$

4. تحقق من أن

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

7. حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات ثم حقق النتائج :

$$3x - 4y = -5$$

$$3y - 5x = 1$$

## ثانياً : المحددات

[ 9 - 11 ] محددات الرتبة الثانية واستخداماتها في حل معادلات المجهولين

إذا اعطينا نظام المعادلتين الآتيتين في مجهولين  $x, y$  :

$$ax + by = L \dots\dots (1)$$

$$cx + dy = k \dots\dots (2)$$

فإن الأعداد  $a, b, c, d$  تسمى المعاملات ، أما العددين  $L, k$  فيسميان الثوابت تكون :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{محدد المعاملات ويرمز لها بالرمز } \Delta \text{ نلاحظ أن معاملات المجهول } x$$

$$\text{تكون العمود الأول للمحدد } \Delta, \text{ نسمي } \begin{vmatrix} L & b \\ k & d \end{vmatrix} \text{ محدد المجهول } x \text{ ونرمز لها بالرمز } \Delta x$$

$$\text{ونحصل عليها من } \Delta \text{ وذلك بعد الاستعاضة عن العمود الأول (معاملات } x) \text{ بالثوابت } L, k \text{ كما نسمي } \begin{vmatrix} a & L \\ c & k \end{vmatrix} \text{ محدد المجهول } y \text{ ونرمز له بالرمز } \Delta y \text{ وذلك بعد الاستعاضة عن}$$

العمود الثاني (معاملات  $y$ ) بالثوابت  $L, K$  والآن بفرض أن  $\Delta \neq 0$  فإن قيمتي المجهولين  $x, y$  تحددان بالعلاقين :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} L & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{Ld - bk}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & L \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ak - cL}{ad - bc}$$



### مثال 1

حل نظام المعادلتين الاثنتين باستخدام المحددات :

$$2x - 3y = -4 \quad , \quad 3x + y = 2$$

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 6}{2 + 9} = \frac{2}{11}$$

$$Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 + 12}{2 + 9} = \frac{16}{11}$$

### مثال 2

$$5X - 6Y = 0 \quad , \quad 3X + 4Y = 0$$

حل نظام المعادلتين :

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{38} = 0$$

$$Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{38} = 0$$

### مثال 3

حل نظام المعادلتين :

$$-3n = 4 - 3m \dots\dots\dots (1)$$

$$6m + n + 4 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

الحل :

نضع المعادلتين بالشكل :

$$3m - 3n = 4$$

$$6m + n = -4$$

$$m = \frac{\Delta m}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 \times 1 - (-3)(-4)}{3 \times 1 - (-3) \times 6} = \frac{4 - 12}{3 + 18} = \frac{-8}{21}$$

$$n = \frac{\Delta n}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times (-4) - 4 \times 6}{3 \times 1 - (-3) \times 6} = \frac{-12 - 24}{3 + 18}$$

$$= \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7}$$



## المحددات من الرتبة الثالثة :

مثال 4

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{فجد قيمة محدد } A$$

الحل :

$$A \text{ محدد} = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (0 \times 5 - 4 \times (-1)) - 3 (1 \times 5 - 4 \times 0) + 0 = 8 - 15 = -7$$

أو حل آخر (طريقة كرامر) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 0 \times 5 + 3 \times 4 \times 0 + 0 \times 1 \times (-1) - (0 + 2 \times 4 \times (-1) + 3 \times 1 \times 5)$$

$$= (2 \times 0 \times 5 + 3 \times 4 \times 0 + 0 \times 1 \times (-1)) - (0 + 2 \times 4 \times (-1) + 3 \times 1 \times 5)$$

$$= 0 - (-8 + 15) = -7$$

### مثال 5

جد ناتج :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2-0) + 3(-1-0) + 4(1-0) = -4 - 3 + 4 = -3$$

أو حل آخر بطريقة كرامير:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (2 \times 2 \times (-1) + (-3) \times 0 \times 0 + 4 \times 1 \times 1) - (4 \times 2 \times 0 + 2 \times 0 \times 1 + (-3) \times 1 \times (-1)) \\ &= (-4 + 4) - (3) \\ &= -3 \end{aligned}$$

[ 9 - 11 - 1 ] استخدام المحددات في حل ثلاث معادلات من الدرجة الاولى في ثلاث متغيرات

إذا كان لدينا نظام المعادلات الآتي في ثلاث مجاهيل  $x, y, z$

$$ax + by + cz = d$$

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

محدد المعاملات :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$



كذلك :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}, \Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

مثال 6

جد حل نظام المعادلات الآتي:

$$x + 3y - z = 1$$

$$2x + 2y + z = 0$$

$$3x + y + 2z = -1$$

الحل :

نجد محدد المعاملات  $\Delta$  :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0$$

### مثال 7

جد قيم  $k$  التي تجعل لنظام المعادلات الآتية حلاً :

$$x+ky=0$$

$$2x-y=0$$

الحل:

يكون لهذا النظام حل عندما تكون محدد معاملاته لا تساوي صفراً عندما

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -1 - 2k \neq 0 \Rightarrow k \neq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

### خواص المحددات :

1 في أي محدد إذا بدلت الصفوف بالاعمدة والاعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 14 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 14 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

مثلاً

2 قيمة المحدد لا تتغير عند إيجاد قيمته عن طريق عناصر أحد صفوف أو أحد أعمدته :

مثلاً

لإيجاد قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 54$$

قيمة المحدد (عناصر أحد الصفوف). أو

$$= 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 54$$

قيمة المحدد (عناصر أحد الأعمدة).



3 إذا كانت جميع عناصر اي صف او عمود في محدد كلها اصفار فان قيمة المحدد تساوي صفراً .

مثلاً

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4 في اي محدد اذا بدلنا موضعي صفين متتالين او عمودين متتاليين فان قيمة المحدد الناتج تساوي قيمة المحدد الاصلي مضروباً في (-1)

مثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

5 اذا تساوت العناصر المناظرة في اي صفين (أو عمودين) في محدد فان قيمة المحدد تساوي صفراً .

مثلاً

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

لان عناصر الصف الاول = عناصر الصف الثالث

6 اذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر اي صف (أو أي عمود) في محدد فان هذا العامل يمكن اخذه خارج المحدد.

مثلاً

$$2 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 12 & 7 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

7. لا تتغير قيمة المحدد اذا أضيفت عناصر اي صف أو (عمود) مضروبة بعدد (k) الى العناصر المقابلة لها في صف او عمود آخر .

مثلاً

بدون فك المحدد أثبت ان :

$$\begin{vmatrix} a+b & c+1 & 1 \\ b+c & a+1 & 1 \\ a+c & b+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

نضيف العمود الاول الى الثاني فنحصل على

$$\begin{vmatrix} a+b & a+b+c+1 & 1 \\ b+c & a+b+c+1 & 1 \\ a+c & a+b+c+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبما ان عناصر العمودين الثاني والثالث متساوية فناتج المحدد = 0

مثال 1

أثبت أن قيمة المحدد = صفر دون استخدام طريقة المحددات .

الحل :

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

أخرج عامل مشترك (3) من عناصر العمود الثاني **خاصية (6)** .

حسب **الخاصية (5)**  $= 3 \times 0 = 0$



## مثال 2

أثبت ان : ( باستخدام خواص المحددات )

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -42 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 6 & -15 & 6 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} \quad \text{خاصية ( 6 ) .}$$

( 7 ) عامل مشترك من عناصر العمود الاول .

$$= 7 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 6 & -15 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{خاصية ( 6 ) .}$$

( 2 ) عامل مشترك من عناصر العمود الثالث

$$= 7 \times 2 \times (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{خاصية ( 6 ) .}$$

( -3 ) عامل مشترك من عناصر الصف الثاني ...

$$= -42 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$



## تمارين ( 4 - 9 )

1. احسب قيمة المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 13 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. جد حل كل من أنظمة المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

a.  $x + 2y = 0$   
 $2x - 3y = 1$

b.  $-3x - 5y = -1$   
 $x + 6y = 3$

c.  $2x = 3y + 4$   
 $5y = -4x - 1$

d.  $6L - 7k = 0$   
 $4L + 3k = 0$

ثم استخدم المصفوفات لحل أنظمة المعادلات المذكورة في سؤال (2) .

3. جد قيمة m التي تجعل لنظام المعادلات الآتية حلاً :

$$x + 2y = 1$$

$$3x + my = 4$$

4. استخدم المحددات لحل أنظمة المعادلات الآتية :

a.  $x + y + z = 1$   
 $2x - y - z = -1$   
 $3x + 2y = 2$

b.  $-x + 3y + z = 0$   
 $3x - 2y - z = 1$   
 $x + y + 2z = 0$

c.  $3x = 2y + 3 + z$   
 $2x - y + 4 = z$   
 $y + z = -x + 3$

d.  $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + \frac{3}{4}z = 1$   
 $3x + y - z = -2$   
 $6x - y + 2z = 0$



5. جد قيم  $m$  التي تجعل لنظام المعادلات الآتية حلاً :

$$x - y + z = 0$$

$$x + y + mz = 0$$

$$-x - y + z = 1$$

6. أثبت أن المبادلة بين صفي محدد من الدرجة الثانية يغير من إشارتها فقط أي أنه

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

7. حل المعادلة الآتية واوجد قيمة  $(x)$ .

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 8 & 1-x & -x \\ x & -1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

8. باستخدام خواص المحددات جد قيمة ناتج المحدد:

:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

9. أثبت باستخدام خواص المحددات :

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$